Zur Deformationstheorie komplex-analytischer Faserbündel

DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität
zu Göttingen

vorgelegt von
WOLFGANG FISCHER
aus Bremen

Göttingen 1964

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544311_0065

Zur Deformationstheorie komplex-analytischer Faserbündel

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Georg-August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

WOLFGANG FISCHER

aus Bremen

Göttingen 1964

R. INST.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

D 7
Referent: Prof. Dr. H. Grauert
Korreferent: Prof. Dr. R. Remmert
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Mai 1964

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
§1 Vorbemerkungen	6
§2 Lokale Deformationen von komplex-analytischen Faserbündeln	19
§3 Hindernisse für Deformationen	25
§4 Existenz von Deformationen	32
§5 Folgerungen aus $H^1(X, \underset{\sim}{AdP}_0) = 0$	45
Literaturverzeichnis	49

Einleitung

Deformationen komplexer Mannigfaltigkeiten, insbesondere solcher der Dimension 1 (Riemannsche Flächen), wurden seit RIEMANN betrachtet. Eine allgemeine und systematische Theorie wurde aber erst von KODAIRA und SPENCER [5][1] aufgestellt. Im Séminaire CARTAN 1960/61 [2] (insbesondere Exposé 1-4 von A.DOUADY) wurde diese Frage wieder aufgegriffen.

Eine (komplex-analytische) Deformation einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine Schar X_t von komplexen Mannigfaltigkeiten, deren Struktur holomorph von einem Parameter t abhängt, welcher in einer komplexen Mannigfaltigkeit B läuft, so daß für einen ausgezeichneten Punkt $0 \in B$ gilt $X_0 = X$.[2] Genauer ausgedrückt: Es sind eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}$, eine komplexe Mannigfaltigkeit B mit ausgezeichnetem Punkt $0 \in B$ und eine eigentliche holomorphe surjektive Abbildung $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$, deren Funktionalmatrix überall den Rang dim(B) hat, gegeben, und es gilt $\pi^{-1}(0) = X$. Zum Studium der lokalen Struktur von $\mathcal{X}$ in der Nähe von X ist es nützlich, das Problem zu "linearisieren". FRÖLICHER und NIJENHUIS [3] betrachteten als erste einen von der Deformation abhängigen Homomorphismus ϱ_0 des Tangentialraums T_0 von B im Punkte 0 in $H^1(X, \Theta)$, die erste Čechsche Cohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in der Garbe der Keime holomorpher Tangentialvektorfelder auf X. Für $v \in T_0$ kann man $\varrho_0(v)$ als "infinitesimale Deformation" von X in Richtung v betrachten. In [5] wird ein $[\ \cup\ ]$-Produkt auf dem graduierten Cohomologiemodul

---

1) Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

2) Für viele Fragen erweist es sich allerdings als zweckmäßig, als Parameterräume auch komplexe Räume mit Singularitäten zuzulassen.

3) A theorem of stability of complex structures. Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 43,239-241(1957)

$H^*(X,\Theta) = \bigoplus_p H^p(X,\Theta)$ mit Hilfe des LIE-Produktes in Θ erklärt (cf. auch diese Arbeit, §1.2.2). Dann wird gezeigt, daß ein Element $\alpha \in H^1(X,\Theta)$ nur dann in $\varrho_0(T_0)$ liegen kann, wenn $[\alpha \cup \alpha] = 0 \in H^2(X,\Theta)$ gilt. Wir können also $[\alpha \cup \alpha]$ als "erstes Hindernis" zu α betrachten.

In [2], Exp.4, wird über die Untersuchung des linearen Anteils einer Deformation hinausgegangen, indem die Deformation durch Anteile höherer Ordnung approximiert wird. Dies geschieht durch eine Filtration in der Garbe von "Deformationskeimen". Es werden Hindernisse höherer Ordnung, welche Teilmengen von $H^2(X,\Theta)$ sind, definiert. Daß alle Hindernismengen zu einer gegebenen Approximation das Nullelement von $H^2(X,\Theta)$ enthalten, ist notwendig dafür, daß diese Approximation wirklich von einer Deformation induziert wird.

Ist $E_0 \longrightarrow X$ ein komplex-analytisches Faserbündel, so verstehen wir unter einer (komplex-analytischen) Deformation von E_0 ein (komplex-analytisches) Faserbündel $E \longrightarrow B \times X$, dessen Einschränkung auf $\{0\}\times X$ gerade E_0 ist. Dabei ist B wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit und 0 ein ausgezeichneter Punkt von B. Nach den Untersuchungen von KODAIRA-SPENCER [5] ist wieder eine Linearisierung des Problems möglich: Ist P_0 das zu E_0 assoziierte Prinzipalbündel, $\underset{\sim}{AdP}_0$ über X die Garbe der Keime holomorpher rechtsinvarianter Vektorfelder auf den Fasern von $P_0 \longrightarrow X$, die tangential zu den Fasern sind, so gibt es einen von E abhängigen Homomorphismus τ_0 des Tangentialraums T_0 von B in 0 in $H^1(X,\underset{\sim}{AdP}_0)$. Für $v \in T_0$ kann man wieder $\tau_0(v)$ als "infinitesimale Deformation" von E_0 in Richtung v betrachten. Wieder ist eine notwendige Bedingung dafür, daß $\alpha \in H^1(X,\underset{\sim}{AdP}_0)$ als infinitesimale Deformation auftritt, das Verschwinden von $[\alpha \cup \alpha] \in H^2(X,\underset{\sim}{AdP}_0)$.

In dieser Arbeit definieren wir für Deformationen eines (Prinzipal-)Bündels P_0 über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X über X eine Garbe $\mathcal{A}(P_0)$ von Deformationskeimen (§2). Eine natürliche Filtration in $\mathcal{A}(P_0)$ gestattet es, Deformationskeime projektiv durch Anteile beliebig hoher Ordnung, die wir auch als "infinitesimale Deformation k-ter Ordnung" (k=1,2,3,...) bezeichnen können, zu approximieren. Wir können analog zu [2] Hindernisse zu einer infinitesimalen Deformation k-ter Ordnung definieren, welche Teilmengen von $H^2(X,\underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ sind. Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine infinitesimale Deformation k-ter Ordnung wirklich von einer Deformation induziert wird, ist, daß sämtliche zugehörigen Hindernismengen das Nullelement von $H^2(X,\underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ enthalten (§3.1.). Im Falle von GL(n,C)-Bündeln kommt man zu einigermaßen expliziten Ausdrücken für die Hindernisse höherer Ordnung (§3.2).

Stellt man an X und das GL(n,C)-Bündel P_0 die Forderung $H^2(X,\underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0) = 0$, so wird dadurch das Verschwinden sämtlicher Hindernisse erzwungen. Unter dieser Voraussetzung konstruieren wir formale Lösungen der beiden folgenden Probleme:

1) Zu einer gegebenen infinitesimalen Deformation k-ter Ordnung eine Deformation zu finden, die sie induziert.

2) Zu zwei gegebenen Bündeln P_0 und P_1, die im Sinne einer vernünftigen Topologie auf $Z^1(X,GL(n,C))$ "nahe beieinander" liegen, eine Deformation P zu finden, welche P_0 mit P_1 verbindet (d.h. P ist etwa über $B\times X$ erklärt, wo $B = \{z\in C: |z| < r;\ r > 1\}$ ist, und die Beschränkung von P auf $\{0\}\times X$ ist isomorph zu P_0, die Beschränkung von P auf $\{1\}\times X$ ist isomorph zu P_1).

Wir erhalten diese formalen Deformationen als formale Reihen nach Potenzen des Parameters. Mit Hilfe eines Lemmas von KURANISHI [7] läßt sich die Konvergenz dieser Potenzreihen in einem geeigneten Bereich zeigen, so daß unsere Probleme nicht nur formal gelöst sind (§4.1). Ist P_0 das

triviale Bündel, so ist die Voraussetzung $H^2(X,\underset{\sim}{Ad}P_0) = 0$ äquivalent mit $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$, wobei $\mathcal{O}$ die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf X bezeichnet. Diese Voraussetzung ist z.B. bei kompakten Riemannschen Flächen, allgemeiner bei singularitätenfreien Hyperflächen in komplex-projektiven Räumen mit von 3 verschiedener Dimension erfüllt.

Nennen wir ein GL(n,C)-Bündel über X konstant, wenn es über einer passenden Überdeckung von X durch einen Cozyklus beschrieben werden kann, der aus konstanten Funktionen besteht, so lassen sich "holomorphe Deformationen eines konstanten Bündels durch konstante Bündel" definieren, das sind solche Deformationen $P \longrightarrow B \times X$, wo für jedes $t \in B$ die Beschränkung von P auf $\{t\}\times X$ konstant ist. Für diese Deformationen läßt sich eine analoge Theorie aufstellen, wir lösen wieder die Probleme 1) und 2), diesmal unter einer Voraussetzung, die für das triviale Bündel mit $H^2(X,C) = 0$ äquivalent ist. Diese Voraussetzung ist z.B. bei HOPFschen Mannigfaltigkeiten erfüllt (§4.3).

FRÖLICHER-NIJENHUIS zeigen, daß $H^1(X,\Theta) = 0$ impliziert, daß jede Deformation von X lokal trivial, d.h. lokal äquivalent zu $B \times X$, ist. KODAIRA-SPENCER [5] beweisen das Analogon für Deformationen eines Bündels $P_0 \longrightarrow X$ mit $H^1(X,\underset{\sim}{Ad}P_0) = 0$. Wir verschärfen dieses Resultat, indem wir zeigen, daß jedes Bündel, welches hinreichend nahe bei P_0 liegt (im Sinne der Topologie auf $Z^1(X,GL(n,C))$), analytisch äquivalent zu P_0 ist, sofern $H^1(X,\underset{\sim}{Ad}P_0) = 0$ gilt - ohne Rücksicht darauf, ob es mit P_0 durch eine Deformation verbunden werden kann.

Herr Professor Grauert regte mich durch sein Kolloquium über KÄHLERsche Mannigfaltigkeiten (1960/61) zur Beschäftigung mit der Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Variablen an. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle sehr herzlich für viele Ratschläge und für seine stete Förderung danken.

§1. Vorbemerkungen

In diesem Paragraphen werden einige für diese Arbeit fundamentale Begriffe und Sätze kurz zusammengestellt, vor allem, um für das folgende die Sprechweise festzulegen. Ferner werden einige später benötigte einfache Tatsachen technischer Natur bewiesen.

Im ersten Abschnitt untersuchen wir die Gruppe der Keime holomorpher Abbildungen f, die eine Umgebung von $0 \in C^n$ in eine komplexe LIEsche Gruppe G so abbilden, daß $f(o) = 1 \in G$.

Im zweiten Abschnitt werden Cup-Produkte für die Cohomologie mit Koeffizienten in Garben von Algebren betrachtet. Der Garbenbegriff und die Definition der Cohomologiegruppen (bzw. der Cohomologiemengen für Garben von nicht-abelschen Gruppen) werden dabei als bekannt vorausgesetzt.- Ferner erinnern wir an einen Satz von LERAY und Anwendungen.

Im dritten Abschnitt werden Prinzipalfaserbündel und allgemeine Faserbündel definiert, wir schließen uns dabei an KOSZUL [6] an. Insbesondere konstruieren wir zwei Typen von Bündeln, die später benötigt werden.

1.1.1. Eine Menge G heißt komplexe LIEsche Gruppe, wenn folgendes erfüllt ist:

(i) G ist eine komplexe Mannigfaltigkeit,

(ii) G ist eine Gruppe (wir schreiben sie i.a. multiplikativ),

(iii) Die Abbildung $G \times G \longrightarrow G$, die jedem Paar $(g,h) \in G \times G$ das Element $g \cdot h^{-1} \in G$ zuordnet, ist holomorph in bezug auf die durch (i) gegebenen komplexen Strukturen auf G und dem kartesischen Produkt $G \times G$.

Das neutrale Element einer LIE-Gruppe G sei, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, mit 1 bezeichnet. Der Raum der Tangentialvektoren an G im Punkte 1 bildet in natürlicher Weise die zu G gehörende LIEsche Algebra $\mathfrak{g}$.

Sei g ein festes Element von G. Die Abbildung $ad(g): G \longrightarrow G$, definiert durch $(ad(g))(h) := ghg^{-1}$, ist ein holomorpher Automorphismus von G, es gilt $ad(g_1 g_2) = ad(g_1) \circ ad(g_2)$. Für jedes $X \in \mathfrak{g}$ und jeden holomorphen Funktionskeim f in $1 \in G$ setzen wir

$(\mathrm{Ad}\ g)(X)f := X(f \circ \mathrm{Ad}\ g)$. Dadurch wird ein Automorphismus $\mathrm{Ad}(g)$ der Vektorraumstruktur von $\mathfrak{g}$ definiert, es ist $\mathrm{Ad}(g_1 g_2) = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2)$.

1.1.2. Sei V eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{O}(V)$ die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf V; den Halm von $\mathcal{O}(V)$ im Punkte $x \in V$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(V)_x$, das maximale Ideal in $\mathcal{O}(V)_x$ - es besteht aus allen Funktionskeimen, die in x verschwinden - mit $\mathfrak{m}_x$. $(\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$, der Duale des Vektorraums $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$, ist ein m-dimensionaler C-Vektorraum ($m = \dim(V)$), $(\mathfrak{m}_x^l/\mathfrak{m}_x^{l+1})^*$ ist in natürlicher Weise zur l-ten symmetrischen Potenz von $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ isomorph. $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ identifiziert sich mit dem Tangentialraum in x; sind $z_1, \ldots, z_n$ lokale Koordinaten mit x als Zentrum, so bilden die Differentialoperatoren

$$\left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_{z=0}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial z_n}\right|_{z=0} \text{ eine Basis für } (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*.$$

Der Raum $(\mathfrak{m}_x^l/\mathfrak{m}_x^{l+1})^*$ wird dann von den Differentialoperatoren $\left.\frac{\partial^l}{\partial z_{\mu_1} \cdots \partial z_{\mu_l}}\right|_{z=0}$ aufgespannt. Damit ist in natürlicher Weise eine bilineare Abbildung $(\mathfrak{m}_x^l/\mathfrak{m}_x^{l+1})^* \times \mathcal{O}(V) \longrightarrow C$ erklärt; aufgrund der Darstellung von $(\mathfrak{m}_x^l/\mathfrak{m}_x^{l+1})^*$ als symmetrische Potenz von $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ erkennt man die Unabhängigkeit dieser Abbildung von den Koordinaten.

Sind V und W komplexe Mannigfaltigkeiten, $\mathfrak{n}$ die Garbe der maximalen Ideale in $\mathcal{O}(W)$, $f: V \longrightarrow W$ eine holomorphe Abbildung, so läßt sich für jede natürliche Zahl l eine Abbildung

$$(d^l f)_x : (\mathfrak{m}_x^l/\mathfrak{m}_x^{l+1})^* \longrightarrow (\mathfrak{n}_{f(x)}^l/\mathfrak{n}_{f(x)}^{l+1})^*$$

definieren, indem man für $X \in (\mathfrak{m}_x^l/\mathfrak{m}_x^{l+1})^*$, $h \in \mathcal{O}(W)_{f(x)}$ setzt

$$((d^l f)_x(X))h := X(h \circ f).$$

f nimmt in $x \in V$ den Wert $f(x) \in W$ von genau k-ter Ordnung an, wenn

$$(df)_x = \dots = (d^{k-1}f)_x = 0, \quad (d^k f)_x \neq 0.$$

1.1.3. Sei jetzt $W = G$ eine LIEsche Gruppe, $f: V \longrightarrow G$ holomorph, $a \in V$ fest, $f(a) = 1$. Wir bezeichnen die Ordnung der 1-Stelle a von f mit $o_a(f)$.

(i) $o_a(f) = o_a(\mathrm{ad}(g) \circ f)$ für jedes $g \in G$.

Sei nämlich $X \in (\mathfrak{m}_a^{\ell} / \mathfrak{m}_a^{\ell+1})^*$, wo jetzt $\mathfrak{m}_a$ das maximale Ideal zu $a \in V$ bezeichnet, $h \in \mathcal{O}(G)_1$. Es ist

$$(d^1(\mathrm{ad}(g) \circ f)(X))h = X(h \circ (\mathrm{ad}(g) \circ f)) = X((h \circ \mathrm{ad}(g)) \circ f)$$
$$= (d^1 f(X))(h \circ \mathrm{ad}(g)).$$

Da $\mathrm{ad}(g)$ auf $\mathcal{O}(G)_1$ eineindeutig operiert, folgt

$$d^1 f = 0 \iff d^1(\mathrm{ad}(g) \circ f) = 0.$$

(ii) Sei $\iota: G \longrightarrow G$ die holomorphe Abbildung, die jedem $g \in G$ sein Inverses g^{-1} zuordnet. Es ist $o_a(f) = o_a(\iota \circ f)$.

Für $X \in (\mathfrak{m}_a^{\ell} / \mathfrak{m}_a^{\ell+1})^*$, $h \in \mathcal{O}(G)_1$ gilt nämlich

$$(d^1(\iota \circ f)(X))h = X(h \circ (\iota \circ f)) = X((h \circ \iota) \circ f) = (d^1 f(X))(h \circ \iota).$$

Da ι eineindeutig auf $\mathcal{O}(G)_1$ wirkt, folgt wieder

$$d^1 f = 0 \iff d^1(\iota \circ f) = 0.$$

(iii) Sind $f_1 : V \longrightarrow G$, $f_2 : V \longrightarrow G$ holomorphe Abbildungen mit $f_1(a) = f_2(a) = 1$, so ist

$$o_a(f_1 \cdot f_2) \geq \min(o_a(f_1), o_a(f_2)).$$

Seien nämlich $h^1, \dots, h^n$ kanonische Koordinaten in einer Umgebung von $1 \in G$. Nach CHEVALLEY [3] (ch.IV, §X, (3)) gilt

$$h^\nu(f_1 \cdot f_2) = h^\nu(f_1) + h^\nu(f_2) + R_\nu(f_1, f_2),$$

wo R_ν eine Potenzreihe in den $h^\mu(f_1)$, $h^\lambda(f_2)$ ist, die erst

mit Gliedern vom zweiten Grade beginnt. Entwickelt man die $h^\nu(f_i)$ nach Potenzen lokaler Koordinaten um $a \in V$ und setzt diese Reihen in die obige ein, so folgt die Behauptung.

1.1.4. Sei $\mathcal{A}$ die multiplikative (nicht notwendig abelsche) Gruppe der Keime holomorpher Abbildungen f, die eine Umgebung von $a \in V$ in G so abbilden, daß $f(a) = 1$. Sei $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ die Menge der Keime, die in a den Wert 1 von mindestens k-ter Ordnung annehmen (k=1,2,3,...). (ii) und (iii) zeigen, daß $\mathcal{A}_k$ eine Untergruppe von $\mathcal{A}$ ist, (i) zeigt, daß $\mathcal{A}_k$ invariant bei den Operationen ad(g) auf $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ ist.

(iv) $\mathcal{A}_k$ ist Normalteiler in $\mathcal{A}$.

Sei $f_1 \in \mathcal{A}_k$, $f_2 \in \mathcal{A}$, seien $h^1,\dots,h^n$ kanonische Koordinaten in G. [3] (loc.cit.(6)) gibt

$$h^\nu(f_2 \cdot f_1 \cdot f_2^{-1}) = h^\nu(f_1) + S_\nu(f_1, f_2),$$

wo S_ν eine Potentreihe in $h^\mu(f_1)$, $h^\lambda(f_2)$ ist, die erst mit Gliedern vom zweiten Grade beginnt. Setzt man wieder die Entwicklung von $h^\nu \circ f_i$ nach lokalen Koordinaten in $a \in V$ ein, so folgt die Behauptung.

(v) Ist $f_1 \in \mathcal{A}$, $f_2 \in \mathcal{A}_k$, so ist

$$f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1} \in \mathcal{A}_{k+1}$$

Das folgt wie bei (iii) und (iv) unter Benutzung kanonischer Koordinaten aus der Formel (5) in [3], loc.cit..

1.1.5. Wir haben also eine unendliche absteigende Normalreihe (Filtration) von $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \dots \supset \mathcal{A}_k \supset \dots \quad ,$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \{\text{konst.Fkt. } 1\}.$$

Wir bilden die Quotientengruppen

$$\mathcal{A}/\mathcal{A}_{k+1} =: \mathcal{B}_k, \quad \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} =: \mathcal{C}_k \subset \mathcal{B}_k .$$

Aussage (v) bedeutet gerade, daß $\mathcal{C}_k$ im Zentrum von $\mathcal{B}_k$ liegt.

Sei für den Augenblick der Einfachheit halber dimV =1, t lokale Koordinate in V mit a als Ursprung.

(vi) Für jedes k = 1,2,3,... ist $\mathcal{C}_k$ in natürlicher Weise isomorph zu $\mathfrak{g}$ (als additiver Gruppe).

Wir definieren nämlich eine Abbildung D: $\mathcal{A}_k \longrightarrow \mathfrak{g}$ auf folgende Weise: für $f \in \mathcal{A}_k$, $h \in \mathcal{O}(G)_1$ sei

$$D_f(h) := d^k f\,(\frac{\partial^k}{\partial t^k})(h) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,(h\circ f)\Big|_{t=0} .$$

D_f ist in der Tat ein Tangentialvektor: Es ist klar, daß D_f linear auf $\mathcal{O}(G)_1$ operiert. Seien weiter $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(G)_1$. Es ist

$$D_f(h_1\cdot h_2) = \sum_{\ell\geq 0} \binom{k}{\ell} \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(h_1\circ f)\Big|_{t=0} \frac{\partial^{k-\ell}}{\partial t^{k-\ell}}(h_2\circ f)\Big|_{t=0}$$

$$= h_1(1)\cdot D_f(h_2) + D_f(h_1)\cdot h_2(1),$$

da $(d^l f)_a = 0$ für $l = 1,\ldots,k-1$.

D ist Gruppenhomomorphismus: Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_k$. Es genügt, die Gleichung

$$D_{f_1\cdot f_2}(h) = D_{f_1}(h) + D_{f_2}(h)$$

für die Koordinaten h^ν eines kanonischen Systems nachzurechnen. Dafür folgt sie aber sofort aus der Gleichung

$$h^\nu(f_1\cdot f_2) = h^\nu(f_1) + h^\nu(f_2) + R_\nu(f_1,f_2).$$

Ist $X \in \mathfrak{g}$, $h^1, \ldots, h^n$ ein Koordinatensystem um $1 \in G$, $X(h^\nu) = a_\nu$, so wird durch $h^\nu \cdot f = \frac{1}{k!}\, a_\nu t^k$ ein Element $f \in \mathcal{A}_k$ definiert, für das $D_f = X$ gilt.

D ist also ein Homomorphismus von $\mathcal{A}_k$ auf $\mathfrak{g}$. Der Kern von D ist offenbar $\mathcal{A}_{k+1}$. (vi) ist also bewiesen.
Für dim V > 1 zeigt man ganz analog

(vi') $\qquad \mathfrak{k}_k \approx \mathfrak{g} \otimes_C (\mathfrak{m}_a^k / \mathfrak{m}_a^{k+1})$.

1.2.1. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{A}$ eine Garbe über X von nicht notwendig assoziativen Algebren (über einem kommutativen Ring), $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X, $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ der graduierte Modul der Coketten über $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{A}$. Wir machen $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ zu einer Algebra, indem wir für $a = \{a_{i_0 \ldots i_p}\} \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, $b = \{b_{i_0 \ldots i_q}\} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ setzen

$$(a \cup b)_{i_0 \ldots i_{p+q}} := a_{i_0 \ldots i_p} \cdot b_{i_p \ldots i_{p+q}}, \quad a \cup b \in C^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{A}),$$

und die "Cup-Produkt" genannte Verknüpfung linear auf ganz $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ fortsetzen. Die Verknüpfung ist dann offenbar bilinear. Sie ist assoziativ, wenn $\mathcal{A}$ assoziativ ist, aber i.a. nicht kommutativ.

Bezeichnet ∂ den Corand-Operator in $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, so gilt für $a \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, $b \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$

$$\partial(a \cup b) = \partial a \cup b + (-1)^p a \cup \partial b.$$

Insbesondere ist das Cup-Produkt zweier Cozyklen wieder ein Cozyklus. Sind a und $\bar{a}$ Cozyklen vom Grade p bzw. q, c und $\bar{c}$ Coketten vom Grade p-1 bzw. q-1, so ist

$$(a + \partial c) \cup (\bar{a} + \partial \bar{c}) = a \cup \bar{a} + \partial(c \cup \bar{a} + (-1)^p a \cup \bar{c} + c \cup \partial \bar{c}).$$

Das Cup-Produkt der Coketten induziert also eine bilineare,

auch Cup-Produkt genannte Verknüpfung in der Cohomologie

$$\cup : H^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \times H^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \longrightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}),$$

genauer

$$\cup : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \times H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \longrightarrow H^{p+q}(\mathcal{U}, \mathcal{A}).$$

Ist $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, $r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \longrightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ der Beschränkungshomomorphismus, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \times C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cup} & C^*(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \\ \downarrow r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \times r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} & & \downarrow r_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \\ C^*(\mathcal{V}, \mathcal{A}) \times C^*(\mathcal{V}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cup} & C^*(\mathcal{V}, \mathcal{A}) \end{array}$$

offenbar kommutativ, wir bekommen also eine Verknüpfung

$$\cup : H^*(X, \mathcal{A}) \times H^*(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^*(X, \mathcal{A}).$$

$H^*(X, \mathcal{A})$ wird zu einer graduierten Algebra, assoziativ, sofern $\mathcal{A}$ assoziativ ist.

1.2.2. Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe von LIEschen Algebren über X, so ist in $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ das Cup-Produkt $a \cup b$ erklärt. Wir definieren eine neue Verknüpfung auf $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, indem wir für $a \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, $b \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ setzen

$$2\ [a \cup b] := a \cup b + (-1)^{pq+1} b \cup a$$

und linear auf ganz $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ fortsetzen. Die Verknüpfung ist offenbar bilinear, es gilt $[a \cup b] = (-1)^{pq+1} [b \cup a]$ und $\partial [a \cup b] = [\partial a \cup b] + (-1)^p [a \cup \partial b]$.

Wir erhalten also ein antikommutatives Produkt auf dem graduierten Cohomologie-Modul $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und im direkten Limes eins auf $H^*(X, \mathcal{G})$. In $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ - i.a. nicht schon in $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ - gilt eine JACOBI-Identität: Für

$\alpha \in H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, $\beta \in H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, $\gamma \in H^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ ist

$$(-1)^{pr}[[\alpha \cup \beta] \cup \gamma] + (-1)^{qp}[[\beta \cup \gamma] \cup \alpha] + (-1)^{rq}[[\gamma \cup \alpha] \cup \beta] = 0.$$

$H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ und im direkten Limes $H^*(X, \mathcal{G})$ sind also mit dem oben definierten Produkt graduierte LIEsche Algebren. (vgl. auch KODAIRA-SPENCER [5], §4.)

1.2.3. Sei $\mathcal{A}$ wieder eine Garbe von assoziativen Algebren. Wenn wir für $a,b \in \mathcal{A}_x (x \in X)$ setzen $[a,b] = ab - ba$, wird $\mathcal{A}$ bekanntlich zu einer Garbe von LIE-Algebren. $H^*(X,\mathcal{A})$ ist also sowohl graduierte assoziative Algebra wie graduierte LIEsche Algebra. Bezeichnen wir das von der assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ induzierte Produkt in der Cohomologie mit $\cup$, das von der "algèbre opposée" (BOURBAKI [1]) induzierte mit $\bar{\cup}$, das von der LIE-Struktur auf $\mathcal{A}$ induzierte mit $[\cup]$, so gilt für

$\alpha \in H^p(X, \mathcal{A})$, $\beta \in H^q(X, \mathcal{A})$:

$$2[\alpha \cup \beta] = \alpha \cup \beta + (-1)^{pq+1} \beta \cup \alpha - \{\alpha \bar{\cup} \beta + (-1)^{pq+1} \beta \bar{\cup} \alpha\}.$$

Im Falle $p = q = 1$ gilt aber $\alpha \cup \beta = -\beta \bar{\cup} \alpha$: Repräsentiert man α und β über einer Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ durch Cozyklen $a = \{a_{ij}\}$, $b = \{b_{ij}\}$, so wird $\alpha \cup \beta$ durch $\{a_{ij} b_{jk}\} \in Z^2(\mathfrak{U}, \mathcal{A})$, $-\beta \bar{\cup} \alpha$ durch $\{-a_{jk} b_{ij}\}$ repräsentiert. Es ist

$$a_{ij} b_{jk} = -a_{jk} b_{ij} - (a_{ij} b_{ij} + a_{jk} b_{jk} - a_{ik} b_{ik}),$$

$$a \cup b = -b \bar{\cup} a - \partial(a \cdot b).$$

Für $\alpha, \beta \in H^1(X, \mathcal{A})$ gilt also

$$[\alpha \cup \beta] = \alpha \cup \beta + \beta \cup \alpha .$$

1.2.4. Es gilt folgender Satz von LERAY:

Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{A}$ eine Garbe von abelschen Gruppen über X, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X,

für die gilt

$$H^q(U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l}, \mathcal{A}) = 0 \text{ für } q > 0,\ l \geq 1,$$

dann ist

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \cong H^p(X, \mathcal{A}) \text{ für } p = 0,1,2,\ldots .$$

Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X so, daß jedes $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l}$ eine Zelle oder leer ist, so nennen wir $\mathcal{U}$ eine LERAY-Überdeckung. Ist $\mathcal{A}$ eine Garbe von abelschen Gruppen über X, die über jedem U_i isomorph zur konstanten Garbe $U_i \times G$ ist, wo G eine feste Gruppe bedeutet, so gilt nach dem Satz von LERAY

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \cong H^p(X, \mathcal{A}),\ p = 0,1,2,\ldots .$$

Im nicht-abelschen Fall gilt für p = 1 noch folgendes Analogon: Ist $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung, bei der alle U_i und $U_i \cap U_j$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend sind, ist G eine Gruppe, $\underline{G}$ die konstante G-Garbe über X, so ist $H^1(\mathcal{U}, \underline{G}) \cong H^1(X, \underline{G})$.

Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X so, daß jedes $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l} \neq \emptyset$ eine STEINsche Mannigfaltigkeit ist, so nennen wir $\mathcal{U}$ eine STEINsche Überdeckung von X. Ist dann $\mathcal{A}$ eine kohärente analytische Garbe über X, so gilt auf Grund des "Theorem B" von H. CARTAN $H^q(U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l}, \mathcal{A}) = 0$ für alle $q \geq 1$, $l \geq 1$, nach dem Satz von LERAY ist also

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \cong H^p(X, \mathcal{A}),\ p = 0,1,2,\ldots .$$

Zu einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit gibt es beliebig feine endliche STEINsche bzw. LERAY-Überdeckungen.

1.3.1. Definition: Sei G eine komplexe LIEsche Gruppe,

X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ein (komplex-analytisches) G-Prinzipalbündel über X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit P, auf der G holomorph (von rechts) operiert, zusammen mit einer holomorphen surjektiven Abbildung $\pi : P \longrightarrow X$, so daß zu jedem $x \in X$ eine (offene) Umgebung $U(x) \subset X$ und eine biholomorphe Abbildung $\varphi_U : \pi^{-1}(U(x)) \longrightarrow U(x) \times G$ existiert mit

(1) $\pi^{-1}(U(x)) \xrightarrow{\varphi_U} U(x) \times G$

$\pi \searrow \quad \swarrow$ Projektion

$U(x)$

ist kommutativ,

(2) für alle $y \in U(x)$, $g, h \in G$ gilt

$$\varphi_U^{-1}(y, g \cdot h) = \varphi_U^{-1}(y, g) \cdot h \ .$$

Ist $P \xrightarrow{\pi} X$ ein G-Prinzipalbündel, so gibt es also eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X und biholomorphe Abbildungen $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Eine solche Überdeckung heiße trivialisierende Überdeckung für P, die Abbildungen φ_i heißen Karten für P. - Die Eigenschaften (1) und (2) haben zur Folge, daß

$$(\varphi_i | \pi^{-1}(U_i \cap U_j)) \circ (\varphi_j | \pi^{-1}(U_i \cap U_j))^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times G$$

von der Gestalt $(x,h) \longrightarrow (x, g_{ij}(x) \cdot h)$ ist, wobei $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ holomorph ist. Es folgt aus der Definition von g_{ij}, daß über $U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt

$$g_{ij}(x)\ g_{jk}(x) = g_{ik}(x).$$

$g = \{g_{ij}\}$ ist also ein Element von $Z^1(\mathcal{U}, \underline{G})$ [1)S.16]

Wir schreiben auch $\varphi_i(p) = (\pi(p), \tilde{\varphi}_i(p))$ und haben

$$\tilde{\varphi}_i(p) = g_{ij}(\pi(p)) \cdot \tilde{\varphi}_j(p).$$

Mit $\mathcal{U}$ ist auch jede Verfeinerung $\mathcal{W} = (W_j)_{j \in J}$ von $\mathcal{U}$ trivialisierende Überdeckung: Ist $\tau : J \longrightarrow I$ mit $W_j \subset U_{\tau(j)}$, so bilden die $\varphi_{\tau(j)}|W_j$ ein System von Karten für P über $\mathcal{W}$.

Ist $\mathcal{V} = (V_k)_{k \in K}$ eine andere trivialisierende Überdeckung für P mit den Karten ψ_k, $\mathcal{W}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$, $\tau : J \longrightarrow I$ mit $W_j \subset U_{\tau(j)}$, $\sigma : J \longrightarrow K$ mit $W_j \subset V_{\sigma(j)}$, so ist die Abbildung

$$(\psi_{\sigma(j)}|W_j) \circ (\varphi_{\tau(j)}|W_j)^{-1} : W_j \times G \longrightarrow W_j \times G$$

von der Form $(x,h) \longrightarrow (x, f_j(x) \cdot h)$, wo $f_j : W_j \longrightarrow G$ holomorph ist. Ist $\{g'_{j_1 j_2}\}$ der von den $\varphi_{\pi(j)}|W_j$ definierte Cozyklus $\in Z^1(\mathcal{W}, \underset{\sim}{G})$, $\{g''_{j_1 j_2}\}$ der von den $\psi_{\sigma(j)}|W_j$ definierte, so gilt

$$f_{j_1} g'_{j_1 j_2} = g''_{j_1 j_2} f_{j_2} \quad \text{über } W_{j_1} \cap W_{j_2}.$$

$\{g'_{j_1 j_2}\}$ und $\{g''_{j_1 j_2}\}$ sind also cohomolog.

Zwei G-Prinzipalbündel $P' \xrightarrow{\pi'} X$ und $P'' \xrightarrow{\pi''} X$ heißen isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : P' \longrightarrow P''$ gibt, so daß

---

1) S.15 Ist X eine feste komplexe Mannigfaltigkeit, G eine LIEsche Gruppe, so bezeichnen wir mit $\underset{\sim}{G}$ die Garbe (über X) der Keime lokaler holomorpher Abbildungen $X \supset Y \longrightarrow G$. Analog bezeichnen wir für ein komplex-analytisches Bündel B über X die Garbe der Keime holomorpher Schnitte mit $\underset{\sim}{B}$.

(3) $\pi'' \circ f = \pi'$,
(4) $f(pg) = f(p)g$ für alle $p \in P$, $g \in G$.

Ein G-Prinzipalbündel heißt trivial, wenn es isomorph zum Produktbündel $X \times G$ (mit der natürlichen Projektion auf X) ist.

Sind P' und P" isomorph und ist $\mathcal{U}$ eine trivialisierende Überdeckung für beide, so sind die zugehörigen Cozyklen $\{g'_{ij}\}$ und $\{g''_{ij}\}$ cohomolog.

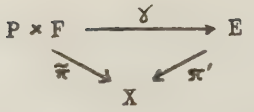
Ist ein Cozyklus $g = \{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{G})$ gegeben, so läßt sich dazu ein G-Prinzipalbündel konstruieren, für das $\mathcal{U}$ trivialisierende Überdeckung ist und das über $\mathcal{U}$ den Cozyklus g induziert: Man bilde $\bigcup_{i \in I} \{i\} \times U_i \times G$ und identifiziere die Elemente $(i,x,h) \in \{i\} \times U_i \times G$ und $(j,x,g_{ij}(x) \cdot h) \in \{j\} \times U_j \times G$, sofern $x \in U_i \cap U_j$. Zu cohomologen Cozyklen erhält man isomorphe Bündel.

Es ergibt sich also eine eineindeutige Zuordnung der (Isomorphieklassen der)G-Prinzipalbündel zu den Elementen von $H^1(X, \underset{\sim}{G})$. Dem trivialen Bündel ist dabei das ausgezeichnete Element von $H^1(X, \underset{\sim}{G})$ zugeordnet, welches über jeder Überdeckung durch den Cozyklus $g_{ij} \equiv 1$ repräsentiert wird.

1.3.2. Sei F eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der G holomorph und effektiv operiert, die Operation sei mit $(g,f) \longrightarrow g \circ f$ bezeichnet. Sei $P \longrightarrow X$ ein G-Prinzipalbündel. Wir konstruieren das "zu P assoziierte Bündel mit typischer Faser und Strukturgruppe G" auf folgende Weise:
Auf $P \times F$ operiert G durch

$$(p,f) \longrightarrow (pg,\ g^{-1} \circ f) \qquad (p \in P,\ f \in F,\ g \in G).$$

Wir identifizieren Punkte aus $P \times F$, die durch Operation von G auseinander hervorgehen, und erhalten $P \times F / G =: E$. Die durch π induzierte Projektion $\tilde{\pi} : P \times F \longrightarrow X$ spaltet sich auf:



Ist $U \subset X$ offen, $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ eine Karte von P, so gibt es eine bijektive Abbildung ψ, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \times F & \xrightarrow{\varphi \times id} & U \times G \times F \\ \downarrow \gamma & & \downarrow q \\ E|U = \pi'^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times F \end{array}$$

wobei $q(x,g,f) := (x, g \circ f)$ gesetzt ist. Das zeigt, daß E lokal isomorph zu $X \times F$ ist. Weiter folgt daraus: Ist $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine trivialisierende Überdeckung für P, sind φ_i Karten dazu mit $\tilde{\varphi}_i = g_{ij} \cdot \tilde{\varphi}_j$, so gibt es Karten $\psi_i : E|U_i \longrightarrow U_i \times F$ mit $\psi_i(e) =: (\pi'(e), \tilde{\psi}_i(e))$,
$\tilde{\psi}_i(e) = g_{ij}(\pi'(e)) \circ \tilde{\psi}_j(e) \qquad (e \in E|U_i \cap U_j)$.

1.3.3. Insbesondere operiert G durch ad auf sich selbst, wir können also zu gegebenem G-Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} X$ ein Bündel $adP \xrightarrow{\pi'} X$ mit G als Faser und Strukturgruppe bilden. Ist $\mathcal{U}$ trivialisierende Überdeckung für P,

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G \text{ Karten}, \quad \tilde{\varphi}_i(p) = g_{ij}(\pi p) \cdot \tilde{\varphi}_j(p) ,$$

so wird adP über $\mathcal{U}$ durch Karten
$\psi_i : \pi'^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$ mit

$$\tilde{\psi}_i(p') = g_{ij}(\pi' p') \cdot \tilde{\psi}_j(p') \cdot g_{ij}^{-1}(\pi' p')$$

beschrieben $(p' \in adP|U_i \cap U_j)$.

Ferner operiert G durch Ad auf der LIEschen Algebra

$\mathfrak{g}$ von G. Wir können also zu P ein Bündel $AdP \xrightarrow{\pi''} X$ mit $\mathfrak{g}$ als Faser und G als Strukturgruppe bilden. Über $\mathcal{U}$ wird AdP beschrieben durch Karten $\chi_i : \pi''^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathfrak{g}$ mit

$$\tilde{\chi}_i(\gamma) = (Ad(g_{ij}(\pi''\gamma))) . \tilde{\chi}_j(\gamma) \qquad (\gamma \in AdP|(U_i \cap U_j)).$$

Die Fasern von adP tragen eine Gruppenstruktur, die von AdP eine LIE-Algebren-Struktur. In adP ist also ein 1-Schnitt, in AdP ein 0-Schnitt wohldefiniert. Diese Schnitte bezeichnen wir meistens kurz mit 1 bzw. 0. AdP ist nichts anderes als das Bündel holomorpher rechtsinvarianter Vektorfelder auf den Fasern von P, welche tangential an die Fasern sind.

1.3.4. Ist $f: Y \longrightarrow X$ eine holomorphe Abbildung komplexer Mannigfaltigkeiten, $B \xrightarrow{\pi} X$ ein Bündel, so bildet die Menge

$$f^*(B) := \{(y,b) \in Y \times B : f(y) = \pi(b)\}$$

mit der natürlichen Projektion ein komplex-analytisches Bündel über Y, das "längs f nach Y geliftete Bündel".

Ist Y eine (singularitätenfreie) Teilmannigfaltigkeit von X und f die Injektion, so heißt $f^*(B)$ auch die Beschränkung von B auf Y und wird mit $B|Y$ bezeichnet.

§2. Lokale Deformationen von komplex-analytischen Faserbündeln

Es werden Deformationen eines Prinzipalbündels $P_0 \longrightarrow X$ definiert und lokale Äquivalenzklassen ("Keime") solcher Deformationen betrachtet. Wir konstruieren eine Garbe $\mathcal{A}(P_0)$ von i.a. nicht-abelschen Gruppen, für die die Menge der Deformationskeime von P_0 in natürlicher Weise bijektiv auf $H^1(X, \mathcal{A}(P_0))$ bezogen wird. Die Garbe $\mathcal{A}(P_0)$ wird genauer beschrieben.

2.1. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, G eine kom-

plexe LIEsche Gruppe, P_o ein G-Prinzipalbündel über X mit der Projektion $\pi: P_o \longrightarrow X$.

Definition: Unter einer lokalen Deformation[1] von P_o verstehen wir ein Quadrupel $(P, \tilde{\pi}, B_1, \iota)$, wo B_1 Umgebung von $0 \in C^m$,
P ein G-Prinzipalbündel über $B_1 \times X$ mit der Projektion $\tilde{\pi}: P \longrightarrow B_1 \times X$,
ι ein Bündelisomorphismus[1] von P_o auf $P|(\{0\} \times X)$ ist.

Definition: Zwei lokale Deformationen $(P', \tilde{\pi}', B_1', \iota')$ und $(P'', \tilde{\pi}'', B_1'', \iota'')$ von P_o heißen lokal-äquivalent, wenn es eine Umgebung B_2 von $0 \in C^m$ gibt mit
$B_2 \subset B_1' \cap B_1''$ und einen Bündelisomorphismus
$f: P'|(B_2 \times X) \longrightarrow P''|(B_2 \times X)$ mit $f \circ \iota' = \iota''$.
Eine Deformation $(P', \tilde{\pi}', B', \iota')$ heißt trivial, wenn sie isomorph zu dem längs der natürlichen Projektion $p: B' \times X \longrightarrow X$ gelifteten Bündel $p^*(P_o)$ ist.

2.2. Sei U eine offene Menge in $X, 0 \in B_1 \subset C^m$, $\pi_1: B_1 \times (P_o|U) \longrightarrow B_1$ die Projektionsabbildung. Wir betrachten Isomorphismen[1] $a: B_1 \times (P_o|U) \longrightarrow B_1 \times (P_o|U)$ mit den Eigenschaften

(1) $(\pi_1 \times \pi) \circ a = \pi_1 \times \pi$ (a ist fasertreu),

(2) a ist mit der Rechtsoperation von G auf den Fasern von P_o verträglich,

(3) $a|(\{0\} \times (P_o|U)) =$ Identität.

Zwei solche Isomorphismen sollen äquivalent heißen, wenn sie in einem $B_2 \times (P_o|U)$, $0 \in B_2 \subset B_1$, übereinstimmen.

---

1) Wir betrachten nur komplex -analytische Deformationen, Isomorphismen etc. und lassen deshalb die Worte "komplex-analytisch" meist fort.

Die Äquivalenzklassen solcher Isomorphismen bilden eine im allgemeinen nicht-abelsche Gruppe, die wir mit $\Gamma(U, \mathcal{A}(P_o))$ bezeichnen wollen. Das System der $\Gamma(U, \mathcal{A}(P_o))$, $U \subset X$, zusammen mit den natürlichen Beschränkungsabbildungen definiert eine Garbe $\mathcal{A}(P_o)$ von nicht notwendig abelschen Gruppen über X.

Satz 1: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Die Äquivalenzklassen lokaler Deformationen von P_o (über B) entsprechen in natürlicher Weise eineindeutig den Elementen von $H^1(X, \mathcal{A}(P_o))$. Die triviale Deformation $P = B \times P_o$ entspricht dabei dem ausgezeichneten Element von $H^1(X, \mathcal{A}(P_o))$.

Beweis: Sei $(P, \tilde{\pi}, B, \iota)$ lokale Deformation von P_o:

$$\begin{array}{ccc} P_o & \xrightarrow{\iota} & P \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\iota_o} & B \times X \end{array} \qquad \iota_o(x) := (0, x) \in B \times X.$$

Sei $(W_i)_{i \in I}$ eine endliche offene Überdeckung einer Umgebung von $\iota_o(X) = \{0\} \times X$ aus Mengen der Form $W_i = B_i \times V_i$ (dann ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von X), so daß es für jedes $i \in I$ Bündelisomorphismen

$$h_i : P|W_i \longrightarrow B_i \times (P_o|V_i)$$

gibt mit den Eigenschaften

(4) $$\begin{array}{ccc} P|W_i & \xrightarrow{h} & B_i \times (P_o|V_i) \\ & {\scriptstyle \tilde{\pi}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi_1 \times \pi} & \\ & B_i \times V_i & \end{array}$$ ist kommutativ,

(5) h_i ist verträglich mit der Operation von G auf den Fasern von P bzw. P_o,

(6) $h_i|(P|(0\times V_i)) = \iota^{-1}$.

Eine solche Überdeckung (W_i) existiert natürlich. Dann definiert $h_i h_j^{-1}$ eine Abbildung von $(B_i \cap B_j)\times(P_o|(V_i\cap V_j))$ auf sich mit den Eigenschaften (1), (2), (3), es werden also Elemente $\gamma_{ij} \in \Gamma(V_i\cap V_j, \mathcal{A}(P_o))$ bestimmt; das System $\gamma = \{\gamma_{ij}\}$ ist offenbar ein Element von $Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{A}(P_o))$.

Geht man zu einer Verfeinerung $\tilde{\mathfrak{W}}$ von $\mathfrak{W}$ über, die die Verfeinerung $\tilde{\mathfrak{V}}$ von $\mathfrak{V}$ induziert, so erhält man das natürliche Bild von γ in $Z^1(\tilde{\mathfrak{V}}, \mathcal{A}(P_o))$.

Hat man zwei lokal-äquivalente Deformationen $(P, \tilde{\pi}, B, \iota)$ und $(P', \tilde{\pi}', B', \iota')$, so kann man die Existenz von Abbildungen $(h_i)_{i\in I}$ und $(h_i')_{i\in I}$ mit den Eigenschaften (4), (5), (6) für dieselbe Überdeckung $(W_i)_{i\in I} = (B_i \times V_i)_{i\in I}$ annehmen. Wir wählen die Nullumgebung $B'' \subset B\cap B'$ so klein, daß $B'' \subset \bigcap_{i\in I} B_i$ und daß es einen Bündelisomorphismus

$$f: P|(B''\times X) \longrightarrow P'|(B''\times X)$$

gibt, der die lokale Äquivalenz herstellt. Dann setzen wir, mit geeigneter Beschränkung der vorkommenden Abbildungen,

$$f_i := h_i' \circ f \circ h_i^{-1} \quad : B''\times(P_o|V_i) \longrightarrow B''\times(P_o|V_i).$$

f_i ist eine Abbildung mit den Eigenschaften (1), (2), (3), definiert also ein $\varphi_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{A}(P_o))$, und man hat über $V_i\cap V_j$ die Beziehung $\gamma_{ij} = \varphi_i^{-1}\gamma_{ij}'\varphi_j$, wenn $\{\gamma_{ij}'\} \in Z^1(\mathfrak{W}, \mathcal{A}(P_o))$ der P' zugeordnete Cozyklus ist. $\{\gamma_{ij}\}$ und $\{\gamma_{ij}'\}$ sind also cohomolog. Speziell folgt die Unabhängigkeit der Klasse von $\{\gamma_{ij}\}$ von der Wahl der h_i. Wir haben also einer Äquivalenzklasse lokaler Deformationen eindeutig ein Element aus $H^1(X, \mathcal{A}(P_o))$ zugeordnet, der

trivialen Deformation ist das ausgezeichnete Element zugeordnet.

Ist umgekehrt ein Element aus $H^1(X, \mathcal{A}(P_o))$ gegeben, das über einer endlichen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X durch $\gamma = \{\gamma_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}(P_o))$ repräsentiert wird, so konstruieren wir dazu auf folgende Weise eine Deformation von P_o: Wir wählen die Umgebung B_1 von $0 \in C^m$ so klein, daß es für alle i,j mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ über $B_1 \times P_o | (U_i \cap U_j)$ Repräsentanten $\tilde{\gamma}_{ij}$ von γ_{ij} gibt mit den Eigenschaften (1), (2), (3), für die über $B_1 \times P_o | (U_i \cap U_j \cap U_k)$ gilt $\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}_{jk} = \tilde{\gamma}_{ik}$. Dann identifizieren wir in der disjunkten Vereinigung aller $B_1 \times P_o | U_i$ jedesmal, wenn $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, die Punkte

$$\xi \in B_1 \times P_o | (U_i \cap U_j) \subset B_1 \times P_o | U_i \quad \text{mit}$$

$$\tilde{\gamma}_{ij}(\xi) \in B_1 \times P_o | (U_i \cap U_j) \subset B_1 \times P_o | U_j$$

und erhalten so eine Deformation P von P_o über B_1. Dieser Deformation kann nach der ersten Konstruktion wieder der Cozyklus γ zugeordnet werden; man erkennt ferner, daß äquivalente Cozyklen nach der zweiten Konstruktion zu äquivalenten Deformationen führen, und schließlich, daß man bei der Konstruktion Deformation $\longrightarrow$ Cozyklus $\longrightarrow$ Deformation eine zur Ausgangsdeformation lokal äquivalente erhält. Damit ist der Satz bewiesen.

Wegen der durch diesen Satz ausgedrückten Eigenschaft wollen wir $\mathcal{A}(P_o)$ die Deformationsgarbe von P_o nennen.

2.3. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X, zu der P_o gegeben wird durch $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{G})$, d.h. es gibt Bündelisomorphismen $\varphi_i : P_o | U_i \longrightarrow U_i \times G$, so daß für $p \in P_o | (U_i \cap U_j)$ gilt

$$(7) \quad \tilde{\varphi}_i(p) = g_{ij}(\pi(p)) \cdot \tilde{\varphi}_j(p).$$

Sei nun $V \subset X$ offen, a ein Automorphismus von $B \times (P_o | V)$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3), und sei $p \in P_o | (V \cap U_i)$, $\pi(p) =: x \in V \cap U_i$, $t \in B$. Vermöge (1) können wir schreiben

$$a(t,p) = (t,\ \varphi_i^{-1}(x, \tilde{a}^i_{t,x}(\tilde{\varphi}_i(p)))\ ),$$

wo $\tilde{a}^i_{t,x}$ ein analytischer Homöomorphismus von G auf sich ist, der holomorph von t und x abhängt. (Genauer: $\tilde{a}^i: B \times (V \cap U_i) \times G \longrightarrow G$ ist holomorph und für festes $(t,x) \in B \times (V \cap U_i)$ Homöomorphismus von G auf sich). Die Forderung (2) bedeutet, daß für alle $g_1, g_2 \in G$ $\tilde{a}^i_{t,x}(g_1 \cdot g_2) = \tilde{a}^i_{t,x}(g_1) \cdot g_2$ gelten muß, $\tilde{a}^i_{t,x}$ ist also nichts anderes als die Linksmultiplikation mit dem Element $\tilde{a}^i_{t,x}(1) \in G$. Im folgenden identifizieren wir $\tilde{a}^i_{t,x}$ mit diesem Element. Die Forderung (3) ist gleichbedeutend mit

(3') $\tilde{a}^i_{o,x} = 1$ für alle $x \in V \cap U_i$.

Die Transformationsgleichung (7) hat für $x \in V \cap U_i \cap U_j$ zur Folge

(7') $\tilde{a}^j_{t,x} = g_{ij}(x) \cdot \tilde{a}^i_{t,x} \cdot g_{ij}^{-1}(x)$.

Wir betrachten andererseits die natürliche Projektion $\pi_2: B \times X \longrightarrow X$ und liften das Bündel adP_o zum Bündel $\pi_2^*(adP_o)$ über $B \times X$. Sei $r: \underset{\sim}{\pi_2^*}(\underset{\sim}{adP_o}) | (0 \times X) \longrightarrow \underset{\sim}{adP_o}$ der Garbenhomomorphismus der analytischen Beschränkung. Der Kern von r besteht gerade aus den Keimen, die durch Schnitte über $B' \times U (B' \subset B,\ U \subset X$ offen) repräsentiert werden, welche über $\{0\} \times U$ identisch den Wert 1 annehmen. Vergleicht man das mit dem Vorangehenden, insbesondere mit (3') und (7'), so erhält man einen kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{A}(P_o)$ auf Kern $(r) \subset \underset{\sim}{\pi_2^*}(\underset{\sim}{adP_o}) | (0 \times X)$. Mittels dieses Isomorphismus identifizieren wir $\mathcal{A}(P_o)$ mit dem Kern von r.

2.4. Die Begriffe "lokale Deformation" und "lokale

Äquivalenz von Deformationen" übertragen sich wörtlich auf beliebige komplex-analytische Bündel $E_0 \xrightarrow{\pi'} X$ mit Strukturgruppe G und Faser F. Ist $P_0 \xrightarrow{\pi} X$ ein G-Prinzipalbündel, zu dem E_0 assoziiert ist, $P \xrightarrow{\tilde{\pi}} B \times X$ eine lokale Deformation von P_0, so ist das zu P assoziierte Bündel $E \xrightarrow{\tilde{\pi}'} B \times X$ mit Faser F eine lokale Deformation von E_0. Hat man umgekehrt eine lokale Deformation $E \xrightarrow{\tilde{\pi}'} B \times X$ von E_0, ist $P \xrightarrow{\tilde{\pi}} B \times X$ ein G-Prinzipalbündel, zu dem E assoziiert ist, so ist P eine lokale Deformation von P_0. Zwei lokale Deformationen von E_0 sind genau dann äquivalent, wenn die zugehörigen lokalen Deformationen des Prinzipalbündels P_0 lokal äquivalent sind.

Es ist also keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Deformationstheorie nur für Prinzipalbündel durchführen.

§3 Hindernisse für Deformationen.

Die Ergebnisse von §1.1. werden auf das Studium von $\mathcal{A}(P_0)$ angewandt und führen zur Definition von Hindernissen beliebiger Ordnung für die Existenz von Deformationen von P_0 zu gegebener "infinitesimaler Deformation" (auch höherer als erster Ordnung). Die Hindernisse sind Teilmengen von $H^2(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$. Im Fall $G = GL(n,C)$ ergeben sich einigermaßen explizite Ausdrücke für die Hindernisse unter Benutzung des Cup-Produktes. Schließlich wird gezeigt, daß die von KODAIRA-SPENCER [5] definierten (ersten) Hindernisse im wesentlichen mit unseren übereinstimmen.

3.1. Im folgenden beschränken wir uns auf einparametrige Deformationen, d.h. die Basis B ist eine Umgebung der Null in C, t sei dort die Koordinate. Höherdimensionales B erfordert nur einfache Modifikationen. Die Bezeichnungen schließen sich an den letzten Paragraphen an.

Sei $x \in X$, $a_x \in \mathcal{A}(P_0)_x$. Wir repräsentieren a_x durch

einen Schnitt $\tilde{a} \in \Gamma(B' \times U, \underset{\sim}{\pi}_2^*(\underset{\sim}{adP}_0))$, wo $U \ni x$, $B' \ni 0$ geeignete Umgebungen sind. Mit Hilfe lokaler Karten für $\pi_2^*(adP_0)$ läßt sich a auffassen als holomorphe Abbildung $B' \times U \longrightarrow G$, die auf $\{0\} \times U$ den Wert 1 annimmt. Nach §1.1.3. ist in jedem $(0,y) \in B' \times U$ die Ordnung des 1-Werdens von a definiert, wegen §1.1.3(i) hängt die Ordnung nicht von der Wahl der Karte ab. Sie ist in $\{0\} \times U$ konstant, etwa = k, wenn man von einer niederdimensionalen analytischen Teilmenge absieht, wo die Ordnung größer werden kann. Dem Keim a_x soll dann die Zahl k zugeordnet werden (sie hängt offenbar nicht von der Wahl des Repräsentanten ab), wir schreiben $O(a_x) = k$.

Sei $\mathcal{A}_k(P_0) = \mathcal{A}_k := \{ a_x \in \mathcal{A}(P_0) : O(a_x) \geq k \}$, $k=1,2,\ldots$. Die Überlegungen von §1.1.3 und §1.1.4 zeigen, daß $\mathcal{A}_k$ eine Untergarbe von Normalteilern von $\mathcal{A}$ ist. Es wird eine Filtration von Garben von Gruppen über X

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{A}_k \supset \ldots$$

definiert mit $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \{1\}$, wobei $\{1\}$ die Untergarbe der neutralen Elemente der Halme von $\mathcal{A}$ ist.
Wir setzen $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{k+1} =: \mathcal{B}_k(P_0)$, $\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} =: \mathcal{C}_k(P_0) \subset \mathcal{B}_k$.
§1.1.5(vi) zeigt, daß für jedes k die Garbe $\mathcal{C}_k$ über X kanonisch isomorph zu $\underset{\sim}{AdP}_0$ ist, wenn man den dortigen Beweis unter Berücksichtigung der holomorphen Abhängigkeiten von $x \in X$ überträgt. §1.1.4(v) hat zur Folge, daß $\mathcal{C}_k$ im Zentrum von $\mathcal{B}_k$ liegt.

Zu der exakten Sequenz von Gruppengarben

$$(8) \qquad 0 \longrightarrow \underset{= \mathcal{A}_{k+1}/\mathcal{A}_{k+2}}{\mathcal{C}_{k+1}} \longrightarrow \underset{= \mathcal{A}/\mathcal{A}_{k+2}}{\mathcal{B}_{k+1}} \longrightarrow \underset{= \mathcal{A}/\mathcal{A}_{k+1}}{\mathcal{B}_k} \longrightarrow 0$$

läßt sich also nach GROTHENDIECK [4] eine exakte Cohomo-

logiesequenz von Menger mit ausgezeichneten Elementen konstruieren:

$$(9)\quad \ldots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{C}_{k+1}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{B}_{k+1}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{B}_k) \xrightarrow{\partial_k} H^2(X, \mathcal{C}_{k+1}).$$

Mittels des kanonischen Isomorphismus $\mathcal{C}_{k+1} \cong \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0$ identifizieren wir $H^2(X, \mathcal{C}_{k+1})$ mit $H^2(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$.

Für $i \leq k$ gibt es natürliche Homomorphismen

$$r_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}_i,\ (r_i)_* : H^1(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{B}_i),$$

$$r_{ki} : \mathcal{B}_k \longrightarrow \mathcal{B}_i,\ (r_{ki})_* : H^1(X, \mathcal{B}_k) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{B}_i).$$

Sei jetzt $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von X und $\gamma = \{\gamma_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}(P_0))$. Dem wird durch r_i ein Element $q_i = r_i(\gamma) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{B}_i)$ zugeordnet ($i = 1,2,3,\ldots$), und für $k \geq i$ gilt $r_{ki}(q_k) = q_i$. Insbesondere liegt die Klasse $[q_k]$ von q_k im Bild von $H^1(X, \mathcal{B}_{k+1}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{B}_k)$, es gilt also $\partial_k([q_k]) = 0$. Damit ist die folgende Definition begründet:

Definition: Sei $q_k \in H^1(X, \mathcal{B}_k)$ und $l \geq k$. Dann heißt $\partial_l (r_{lk})_*^{-1}(q_k) \subset H^2(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ das l-te Hindernis zu q_k. Das l-te Hindernis zu q_k heißt trivial, wenn es das neutrale Element von $H^2(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ enthält.

Bemerkungen: 1) Wird $q_k \in H^1(X, \mathcal{B}_k)$ von einem $\gamma \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ induziert, so sind alle Hindernisse zu q_k nach Definition trivial.
2) Trivialität des l-ten Hindernisses von $q_k \in H^1(X, \mathcal{B}_k)$ ($l \geq k$) bedeutet nach Definition: Es gibt

$q_{l+1} \in H^1(X, \mathcal{B}_{l+1})$ so, daß $(r_{l+1,k})_*(q_{l+1}) = q_k$. Das ist gleichbedeutend damit, daß das $(l+1)$-te Hindernis nicht leer ist (ein leeres Hindernis ist nichttrivial!). Das ist ferner gleichbedeutend mit der Trivialität der i-ten Hindernisse von q_k für $k \leq i \leq l$.

3.2. Berechnung der Hindernisse für $G = GL(n,C)$. Zur Berechnung von Hindernissen ist es vorteilhaft, die Garbe von LIEschen Algebren $\underset{\sim}{AdP}_o$ in eine (möglichst kleine) Garbe von assoziativen Algebren einzubetten. Das ist im Falle $G = GL(n,C)$ besonders einfach, da ja die LIEsche Algebra von $GL(n,C)$ gerade der Vektorraum $M_n(C)$ aller (n,n)-reihigen Matrizen, versehen mit dem LIE-Produkt $[A,B] = AB - BA$, ist; das LIE-Produkt wird also durch das gewöhnliche assoziative Produkt induziert. Wir betrachten im folgenden nur $GL(n,C)$-Prinzipalbündel P_o, fassen AdP_o i.a. als Bündel von assoziativen Algebren mit 1 auf und adP_o als Teilbündel der multiplikativen Einheiten des Algebrenbündels AdP_o.

Sei also P_o ein $GL(n,C)$-Prinzipalbündel, $U \subset X$, $a \in \Gamma(U, \mathcal{A}(P_o)) \subset \Gamma(U, \underset{\sim}{\pi}_2^*(\underset{\sim}{AdP}_o) \mid (0 \times X))$.

a läßt sich in eine konvergente Potenzreihe nach t entwickeln [1]:

$$(1o) \quad a = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots , \; a_k \in \Gamma(U, \underset{\sim}{AdP}_o).$$

Ein Keim $a_x \in \mathcal{A}(P_o)_x (x \in X)$ läßt sich ebenso in eine konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$(1o)_x \; a_x = 1 + a_{1,x} t + a_{2,x} t^2 + \dots , a_{k,x} \in (AdP_o)_x .$$

---

1) Man kann annehmen, daß P_o über einer hinreichend feinen endlichen trivialisierenden Überdeckung durch einen im Sinne einer vernünftigen Metrik auf $GL(n,C)$ beschränkten Cozyklus gegeben ist. Dann läßt sich die Konvergenz solcher Reihen über die Karten definieren.

Die Untergarbe $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ besteht aus den Keimen, für die in $(1o)_x$ gilt $a_{1,x} = \ldots = a_{k-1,x} = 0$. Faßt man t als Unbestimmte auf, so identifiziert sich $\mathcal{B}_k = \mathcal{A}/\mathcal{A}_{k+1}$ mit der Untergarbe (von multiplikativen Gruppen) von $(\underset{\sim}{\mathrm{AdP}}_o)[t]/(t^{k+1})$, die aus den Elementen mit konstantem Term = 1 besteht. Die Isomorphie von $\mathcal{C}_k = \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1}$ zu $\underset{\sim}{\mathrm{AdP}}_o$ ist trivial zu sehen.

Sei $q_k \in H^1(X, \mathcal{B}_k)$ $(k \geq 1)$ repräsentiert durch

$$q^{(k)} = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{B}_k),$$

wo $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist und $a_l \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{AdP}}_o)$ für $l = 1, \ldots, k$. Die Cozyklusbedingung für $q^{(k)}$ ist gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$(11)\quad \partial a_l = -\sum_{m=1}^{l-1} a_m \cup a_{l-m},\ l = 1, \ldots, k, \text{ in } C^*(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{AdP}}_o)$$

(insbesondere muß also $a_1 \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{AdP}}_o)$ sein).

k-tes Hindernis von q_k: r_{kk} ist die Identität. Um $\partial_k(q_k)$ zu bilden, liften wir $q^{(k)}$ "identisch" nach $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{k+1})$ - dort ist $q^{(k)}$ i.a. kein Cozyklus mehr - bilden den Corand in $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{B}_{k+1})$, der von der Form

$$\{(1 + x_{i_1 i_2 i_3} t^{k+1})\},\ x = \{x_{i_1 i_2 i_3}\} \in Z^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{AdP}}_o),$$

sein muß. Man errechnet

$$x = a_1 \cup a_k + a_2 \cup a_{k-1} + \ldots + a_k \cup a_1,$$

das k-te Hindernis von q_k ist die Cohomologieklasse von x, Trivialität des Hindernisses bedeutet die Existenz eines

$y \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$ mit $\partial y = -x$ (nach eventueller Verfeinerung von $\mathcal{U}$; wenn man von vornherein $\mathcal{U}$ als STEINsche Überdeckung voraussetzt, kann man hier und in den nächsten Gleichungen immer mit demselben $\mathcal{U}$ arbeiten, da $\underset{\sim}{AdP}_0$ als freie analytische Garbe aufgefaßt werden kann), d.h. Lösbarkeit der Gleichung

$$(12)\quad \partial y = -(a_1 \cup a_k + a_2 \cup a_{k-1} + \ldots + a_k \cup a_1). \qquad 1)$$

Im Falle der Lösbarkeit ist y offenbar bis auf ein Element $c \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$ bestimmt.

(k+1)-tes Hindernis von q_k: Wir können annehmen, daß das k-te Hindernis trivial ist, sei a_{k+1} eine feste Lösung davon im Sinne der Gleichung (12).
$(r_{k+1,k})^{-1}(q^{(k)})$ besteht aus allen Cozyklen der Form

$$1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k + (a_{k+1} + c)t^{k+1},$$

$c \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$ beliebig. $\partial_{k+1}(r_{k+1,k})_*^{-1}(q_k)$ besteht dann aus der Menge der Klassen von Cozyklen der Form

$$a_1 \cup (a_{k+1} + c) + a_2 \cup a_k + \ldots + a_k \cup a_2 + (a_{k+1} + c) \cup a_1 .$$

Trivialität des (k+1)-ten Hindernisses bedeutet Existenz eines $y \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$ und eines $c \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$ mit

$$(13)\quad \partial y = -\{a_1 \cup a_{k+1} + a_2 \cup a_k + \ldots + a_{k+1} \cup a_1\} - (a_1 \cup c + c \cup a_1).$$

Im Falle der Lösbarkeit ist y bis auf Addition einer Lösung $z \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$ der Gleichung

$$\partial z = a_1 \cup d + d \cup a_1 , \quad d \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \text{ beliebig,}$$

bestimmt.

---

1) Das negative Vorzeichen ist im Hinblick auf (11) gewählt.

l-tes Hindernis von q_k ($l \geq k+2$, $(l-1)$-tes Hindernis trivial): Die Unbestimmtheit in den Lösungen der m-ten Hindernisse, $k \leq m \leq l-1$, ist unangenehm zu beschreiben, die explizite Angabe des vollständigen l-ten Hindernisses von q_k scheint kaum möglich. Jedenfalls ist die Trivialität des l-ten Hindernisses gleichbedeutend mit der Lösbarkeit der Gleichungen

$$(14)\quad \partial a_m = -\sum_{\mu=1}^{m-1} a_\mu \cup a_{m-\mu};\ m=k+1,\dots,l+1;\ a_m \in C^1(\mathfrak{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0).$$

Diese Aussage ist freilich nur eine andere Formulierung der Definition.

Ob aus der Trivialität aller Hindernisse von q_k auf die Existenz einer formalen Potenzreihe

$$1 + a_1 t + \dots + a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots, \qquad a_m \in C^1(\mathfrak{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0),$$

die die multiplikative Cozyklusbedingung erfüllt, geschlossen werden kann, ist mir nicht bekannt. Im nächsten Paragraphen werden wir aber unter der schärferen Voraussetzung $H^2(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0) = 0$ die Existenz solcher Potenzreihen, die Elemente von $H^1(X, \mathcal{A}(P_0))$ repräsentieren, zeigen.

3.3. Sei P über $B \subset C^m (0 \in B)$ Deformation von $P_0 \longrightarrow X$, sei T_0 der Tangentialraum in 0 an B, längs $B \times X \longrightarrow B$ zu einer konstanten Garbe T_0 über X geliftet. KODAIRA-SPENCER [5], insbesondere §7, definieren eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0 \longrightarrow \Gamma_0' \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0,$$

wo Γ_0' eine gewisse von der lokalen Deformation P abhängige Garbe ist. Sie betrachten die zugehörige exakte Cohomologiesequenz und die durch den natürlichen Isomorphismus $T_0 \cong H^0(X, T_0)$ definierte Abbildung $\tau_0 : T_0 \longrightarrow H^1(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$:

$$\dots \longrightarrow H^0(X, T_0) \longrightarrow H^1(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0) \longrightarrow \dots$$
$$\| \qquad \nearrow_{\tau_0}$$
$$T_0$$

Seien $t_1,\dots,t_m$ Koordinaten in B. Der nach Satz 1 zu P gehörende Cozyklus $\gamma \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}(P_0))$, wo $\mathcal{U}$ eine geeignete Überdeckung von X ist, läßt sich in eine Potenzreihe nach den t_μ entwickeln:

$$\gamma = 1 + \sum_\mu a_\mu t_\mu + \sum_{\mu_1,\mu_2} a_{\mu_1\mu_2} t_{\mu_1} t_{\mu_2} + \dots \quad ,$$

$$a_{\mu_1,\dots,\mu_k} \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0),\ a_\mu \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0).$$

Eine Rechnung ergibt, daß für $\mu=1,\dots,m$ das Bild $\tau_0(\frac{\partial}{\partial t_\mu})$ gleich der Cohomologieklasse von a_μ ist. Die Abbildung τ_0 ist also durch das "lineare Glied" von γ bestimmt. KODAIRA-SPENCER benutzen weiter, daß $\underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0$ eine Garbe von LIEschen Algebren ist (cf.p.19: $\mathrm{Ad}P_0$ ist ein Bündel von Vektorfeldern), dadurch wird nach §1.2.2. auf $H^*(X,\underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ die Struktur einer graduierten LIEschen Algebra induziert. Sie beweisen ([5] , Prop. 7.2.), daß $\tau_0(T_0)$ für jede Deformation P eine abelsche LIE-Unteralgebra von $H^*(X,\underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß für jedes $\alpha \in \tau_0(T_0)$ gilt $[\alpha\cup\alpha] = 0$. Nach §1.2.3. ist aber $[\alpha\cup\alpha] = 2\,\alpha\cup\alpha$. Das von KODAIRA-SPENCER definierte Hindernis zu einem $\alpha \in H^1(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ ist also mit unserem ersten Hindernis zu dem entsprechenden Element von $H^1(X, \mathcal{B}_1)$ bis auf den Faktor 2 identisch.

§4 Existenz von Deformationen.

Sei P_0 ein $GL(n,C)$-Prinzipalbündel über X, $\mathcal{U}$ eine endliche STEINsche Überdeckung von X. Ist $H^2(X, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0) = 0$, so kann jedes im Sinne einer vernünftigen Topologie von $Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ hinreichend nahe bei P_0 gelegene Bündel P_1 aus P_0 durch eine Deformation gewonnen werden. Jedes $a_1 \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_0)$ kommt als infinitesimale Deformation von P_0 vor. Analoge Resultate gelten für Bündel mit konstanten

Cozyklen.- Der Einfachheit halber führen wir die Beweise zunächst für den Fall $P_o = X \times GL(n,C)$ und geben dann die für den allgemeinen Fall notwendigen Modifikationen an.

4.1.1. Wesentlich für den Konvergenzbeweis ist ein Lemma von KURANISHI ([7], Lemma 2.5').

Lemma: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{S}$ eine freie analytische Garbe über X vom Range r, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche STEINsche Überdeckung von X mit den Eigenschaften

(i) in U_i gibt es Koordinaten $z_i = (z_i^1, \ldots, z_i^m)$,

$$\text{für die } U_i = \{ z_i : |z_i^\mu| < 1,\ 1 \leq \mu \leq m \},$$

(ii) über U_i gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi_i : \mathcal{S}|U_i \longrightarrow \mathcal{O}^r|U_i \quad , (\mathcal{O} = \mathcal{O}(X)),$$

$$\varphi_i(s) = (\varphi_i^1(s), \ldots, \varphi_i^r(s)), \quad \varphi_i^\varrho(s) \in \mathcal{O}|U_i.$$

Sei $0 < e < 1$, $U_i^e := \{ z_i : |z_i^\mu| < 1-e,\ 1 \leq \mu \leq m \}$,

und e so klein, daß $\mathcal{U}^e := (U_i^e)_{i \in I}$ noch X überdeckt.

Für $\xi = \{ \xi_{i_0 \ldots i_q} \} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ setzen wir

$$|\xi|_e := \sup_{1 \leq \varrho \leq r} \sup_{(i_0, \ldots, i_q)} \sup | \varphi_{i_0}^\varrho (\xi_{i_0 \ldots i_q})(U_{i_0}^e \cap \ldots \cap U^e{}_{i_{q-1}} \cap U_{i_q}) .$$

Wir setzen ferner $C_e^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) := \{ \xi \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) : |\xi|_e < \infty \}$,

$Z_e^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \cap C_e^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ sowie

$B_e^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) := \partial C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \cap C_e^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_e^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C_e^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow B_e^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow 0$$

exakt, und es gibt eine Konstante K und einen Spalthomomorphismus $\alpha : B_e^2(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C_e^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, so daß

(iii) $\partial \circ \alpha =$ Identität auf $B_e^2(\mathcal{U}, \mathcal{S})$,

(iv) für beliebiges $a \in B_e^2(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ gilt

$$|a|_e \leq c \implies |\alpha(a)|_e \leq Kc.$$

KURANISHI beweist loc. cit. dies Lemma für $\mathcal{S} = \Theta =$ Garbe der Keime von holomorphen Tangentialvektorfeldern, der Beweis überträgt sich aber wörtlich auf beliebige freie analytische Garben.

Wenn P_o das triviale $GL(n,C)$-Prinzipalbündel über X ist, so ist $adP_o = P_o$ und AdP_o ist das triviale $M_n(C)$-Bündel über X. Seien $\mathcal{U}$, e, α, K wie im Lemma für $\mathcal{S} = \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C})$, die $|\ |_e$-Norm einer lokalen Schnittfläche in $\underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C})$ soll durch das Maximum der Normen der Komponenten gegeben werden.

Wir machen nun die Voraussetzung $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$. Das ist gleichbedeutend mit $H^2(X, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C})) = 0$.

Sei $a \in Z_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C}))$. Wir setzen

$$(14_1) \quad x_1 := a \in C_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C})),$$

$$(14_{k+1}) \quad x_{k+1} := -\alpha\Big(\sum_{l=1}^{k} x_l \cup x_{k+1-l}\Big), \quad k=1,2,3,\ldots .$$

Das ist wohldefiniert; denn $\sum x_l \cup x_{k+1-l}$ ist ein Repräsentant eines Elementes des k-ten Hindernisses der Klasse von 1 + a in $H^1(X, \mathcal{B}_1)$, also sicher in $Z^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C}))$, was man auch direkt nachrechnen kann. Da $\mathcal{U}$ als STEINsch und $H^2(X, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C})) = 0$ vorausgesetzt ist, liegt $\sum x_l \cup x_{k+1-l}$ in $B^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C}))$. Ferner ist mit $x_l \in C_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C}))$, $l=1,\ldots,k$, auch $\sum x_l \cup x_{k+1-l}$ in $C_e^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M}_n(\underset{\sim}{C}))$:

$$\Big|\sum_{l=1}^{k} x_l \cup x_{k+1-l}\Big|_e \leq n \cdot \sum_{l=1}^{k} |x_l|_e \cdot |x_{k+1-l}|_e .$$

Wegen einer späteren Verallgemeinerung ersetzen wir in dieser Ungleichung n durch eine beliebige Konstante $N \geq n$:

$$|\sum x_1 \cup x_{k+1-1}|_e \leq N \cdot \sum |x_1|_e \cdot |x_{k+1-1}|_e$$

Die Summe ist also ein Element von $B_e^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$, und man kann den Homomorphismus α darauf anwenden.

Für $\gamma_k := \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(2k-2)!}{k!}$, $k = 1,2,3,\ldots$,

gilt $\sum_{\ell=1}^{k} \gamma_1 \cdot \gamma_{k+1-1} = \gamma_{k+1}$, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t^k$ konvergiert für hinreichend kleine $t \in C$ (für $|t| < 1/4$).[1)]

Man gewinnt durch Induktion aus den Formeln (14) die Abschätzung

$$(15) \quad |x_{k+1}|_e \leq \gamma_{k+1} \cdot (KN)^k \cdot |a|_e^{k+1} \quad , \; k = 1,2,3,\ldots .$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$(16) \qquad 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

für hinreichend kleines $|a|_e$; bzw. die auf $X \times \{|t| < \varepsilon\}$ gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$(17) \qquad 1 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots \quad ,$$

sofern $\varepsilon > 0$, von $|a|_e$ abhängig, hinreichend klein ist.

(16) stellt also im Falle der Konvergenz ein Element von $C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$ dar, ebenso (17) für jedes hinreichend kleine t. Aus (15) folgt weiter, daß (16) für hinreichend kleines $|a|_e$ bzw. (17) für hinreichend kleines t sogar Elemente von $C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ sind. Nach Konstruktion gilt ferner

$$\partial x_{k+1} = - \sum_{\ell=1}^{k} x_1 \cup x_{k+1-1},$$

woraus folgt (cf.(11), p.29), daß (16) ein Element von $Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ und (17) ein Element von $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}(P_o))$ dar-

---

[1)] Es ist nämlich $\sum_{1}^{\infty} \gamma_k t^k = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4t}\right)$.

stellt.

Sei jetzt $g \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$, $g =: 1 + a$, $a \in C_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$ hinreichend klein. Die Cozyklus-Bedingung für g ist gleichbedeutend mit $\partial a = -a \cup a$. Wir setzen nun $x_1 := a - \alpha\partial(a) \in Z_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$ und konstruieren dazu wie oben vermöge der Formeln (14), (16) ein Element

$$\tilde{g} = 1 + x_1 + x_2 + \ldots \qquad \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)}) .$$

Es ist $\tilde{g} = g$, sofern $|a|_e$ hinreichend klein ist:

Setzen wir $r_{k+1} := a - \sum_{i=1}^{k} x_1$, $k = 0,1,2,\ldots$, so gilt

für $m \geq 2$: $r_{2m-1} = -\alpha\Big(\sum_{1}^{m-1} (x_1 \cup r_{2m-1-1} + r_{2m-1-1} \cup x_1) + r_m \cup r_m\Big)$,

für $m \geq 1$: $r_{2m} = -\alpha\Big(\sum_{i=1}^{m-1} (x_1 \cup r_{2m-1} + r_{2m-1} \cup x_1) + r_m \cup r_m\Big)$.

(Beweis durch Induktion unter Berücksichtigung von $r_{k+1} - r_k = -x_k$ und der Definition von x_k.)
Daraus folgt unter Berücksichtigung von

$$|x_1|_e \leq |a|_e \cdot (1 + Kn \cdot |a|_e)$$

für hinreichend kleines $|a|_e$ eine Abschätzung der Form

$$|r_k|_e \leq 2^{5(k-2)} \cdot (Kn)^{k-1} \cdot |a|_e^k \qquad (k \geq 2) ,$$

für hinreichend kleines $|a|_e$ gilt also $r_k \longrightarrow 0$.

Für das triviale GL(n,C)-Bündel P_o ist $\mathcal{B}_1(P_o) \cong \underset{\sim}{M_n(C)}$, wir haben die Abbildung $r_1 : \mathcal{A}(P_o) \longrightarrow \mathcal{B}_1$.- Konvergiert die Potenzreihe $(1o)_x$ eines Elementes a von $\mathcal{A}(P_o)_x$ für $t = t_o$, so sei ihr Wert an dieser Stelle mit $\varphi_{t_o}(a)$ bezeichnet.

Mit diesen Notationen erhalten wir aus den obigen Überlegungen folgende Sätze:

Satz 2: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$, P_o das triviale GL(n,C)-Bündel über X, $\mathcal{U}$ wie im Lemma. Es gibt eine Abbildung
$\sigma : Z^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)}) \longrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}(P_o))$ mit
$r_1 \circ \sigma =$ Identität und $\sigma(0) = 1$.
Es gibt eine Umgebung W von $0 \in Z^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$, so daß für jedes $a_1 \in W$ die Potenzreihe für $\sigma(a_1)$ an der Stelle $t = 1$ konvergiert; $\varphi_1 \circ \sigma$ ist eine stetige Abbildung von W auf eine Umgebung von $1 \in Z^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$.

Dabei ist die Topologie mittels der $|\ |_e$-Norm erklärt. Die Abbildung $\varphi_1 \circ \sigma$ induziert m.W. im allgemeinen keine Abbildung in den Cohomologiegruppen.

Satz 3: Ist X kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$, so ist jedes GL(n,C)-Bündel, das durch einen hinreichend nahe bei 1 gelegenen Cozyklus beschrieben werden kann, Deformation des trivialen Bündels.

Satz 4: Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$, so wird jedes Element von $H^1(X, \underset{\sim}{M_n(C)})$ durch eine Deformation des trivialen GL(n,C)-Bündels induziert, d.h. tritt als "infinitesimale Deformation" im Sinne von KODAIRA-SPENCER auf.

Satz 4': Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^2(X,\mathcal{O}) = 0$, ist $\mathcal{B}_k$ wie auf p.26 definiert (für das triviale GL(n,C)-Bündel), so wird jedes Element von $H^1(X,\mathcal{B}_k)$ durch ein Element von $H^1(X,\mathcal{A})$ induziert.

Beweis: Man repräsentiere $\alpha \in H^1(X,\mathcal{B}_k)$ über einem hinreichend feinen $\mathcal{U}$ mit den Eigenschaften, die im Lemma gefordert werden, durch

$$1 + a_1 t + \ldots + a_k t^k \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{B}_k),$$

und wähle $\mathcal{U}$ noch so fein, daß $a_l \in C^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$, $l = 1,..,k$.

Dann kann man durch die Formeln (14_m) Coketten

$a_m \in C_e^1(\mathfrak{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$, $m = k+1, k+2, \ldots$, definieren und genau wie oben zeigen, daß die Reihe $1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^m$ für hinreichend kleine t konvergiert und ein Element von $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{A})$ darstellt.

Satz 4 ist Spezialfall von Satz 4', man erhält ihn daraus, indem man $k = 1$ setzt und $\mathcal{B}_1 = \underset{\sim}{M_n(C)}$ beachtet.

4.1.2. Die Voraussetzung $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$ ist aus Dimensionsgründen erfüllt, wenn X eine kompakte Riemannsche Fläche ist. Ist X eine singularitätenfreie Hyperfläche im m-dimensionalen komplex-projektiven Raum $P^m (m \neq 3)$, so gilt ebenfalls $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$:

Sei $\mathcal{J}(X) \subset \mathcal{O}(P^m)$ die Idealgarbe von X, $\hat{\mathcal{O}}(X)$ die triviale Fortsetzung von $\mathcal{O}(X)$ auf den P^m. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(P^m) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}(X) \longrightarrow 0$$

gibt Anlaß zu einer exakten Cohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^2(P^m, \mathcal{O}(P^m)) \longrightarrow H^2(P^m, \hat{\mathcal{O}}(X)) \longrightarrow H^3(P^m, \mathcal{J}(X)) \longrightarrow \ldots$$

Es ist $H^2(P^m, \mathcal{O}(P^m)) = 0$, das folgt etwa aus $H^2(P^m, C) \cong C$ und der Tatsache, daß für die kompakte KÄHLERsche Mannigfaltigkeit P^m eine Zerlegung

$$H^2(P^m, C) = H^{2,0}(P^m, C) \oplus H^{1,1}(P^m, C) \oplus H^{0,2}(P^m, C)$$

gilt, wo $H^{1,1}(P^m, C) \neq 0$ und $H^{0,2}(P^m, C) \cong H^2(P^m, \mathcal{O}(P^m))$ ist. Weiter ist offenbar $H^*(P, \hat{\mathcal{O}}(X)) \cong H^*(X, \mathcal{O}(X))$. Schließlich ist $H^*(P^m, \mathcal{J}(X)) = H^*(P^m, [X]^{-1})$, wobei $[X]^{-1}$ das Duale des zum Divisor X assoziierten Geradenbündels $[X]$ ist. $[X]$ ist aber positiv, daher verschwindet nach einem "vanishing theorem" von KODAIRA $H^q(P^m, [X]^{-1})$ für $q \neq m$ (cf. HIRZEBRUCH [8], insbesondere Satz 18.2.1.).

4.2. Wir betrachten jetzt ein beliebiges GL(n,C)-Prin-

zipalbündel P_o über X. $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ sei eine Überdeckung von X mit den in Lemma geforderten Eigenschaften und außerdem so, daß P_o durch ein $h = \{h_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \underbrace{GL(n,C)}) $ mit $|h|_e < \infty$ gegeben wird. Das Bündel AdP_o wird dann beschrieben durch Karten

$$\psi_i : AdP_o|U_i \longrightarrow U_i \times M_n(C)$$

mit $\widetilde{\psi}_i(p) = h_{ij}(\pi(p)).\ \widetilde{\psi}_j(p).h_{ij}^{-1}(\pi(p))$, $p \in AdP_o|U_i \cap U_j$. Mittels dieser Karten führen wir wie im Lemma auf den Coketten über $\mathcal{U}$ mit Werten in AdP_o eine $|\ |_e$-Norm ein und erhalten eine spaltende Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_e^1(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o}) \longrightarrow C_e^1(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o}) \underset{\alpha}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} B_e^2(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o}) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist $\partial\circ\alpha$ die Identität, und es gibt eine Konstante K mit $|a|_e \le c \Rightarrow |\alpha(a)|_e \le K.c$ für $a \in B_e^2(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o})$.

Hier wird die Abschätzung des Cup-Produktes etwas anders: Für $a,b \in Z_e^1(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o})$ ist

$$\widetilde{\psi}_i((a\cup b)_{ijk}) = \widetilde{\psi}_i(a_{ij}).h_{ij}.\ \widetilde{\psi}_j(b_{jk}).h_{ji} \quad ,$$

es ergibt sich also

$$|(a\cup b)|_e \le n^3.|h|_e^2.|a|_e.|b|_e \ .$$

Abgesehen davon ändern sich die Rechnungen aus dem ersten Abschnitt des Paragraphen nicht, und wir erhalten:

Satz 2a: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, P_o ein GL(n,C)-Bündel über X, $\mathcal{U}$ wie oben, $H^2(X, \underbrace{AdP_o}) = 0$. Es gibt eine Abbildung $\sigma: Z_e^1(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o}) \longrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}(P_o))$ mit $r_1\circ\sigma$ = Identität und $\sigma(0) = 1$.
Es gibt eine Umgebung W von $0 \in Z_e^1(\mathcal{U}, \underbrace{AdP_o})$, so daß für jedes $a_1 \in W$ die Potenzreihe für $\sigma(a_1)$ an der Stelle t=1 konvergiert, $\varphi_1\circ\sigma(a_1)$ sei ihr Wert für t = 1. $\varphi_1\circ\sigma$ ist eine stetige Abbildung von W auf eine Umgebung von

$1 \in Z^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0})$.

Wir definieren jetzt eine Abbildung $\tau = \tau_h$

$$\tau : C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)}) :$$

für $g = \{g_{ij}\} \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0})$ sei $\tau(g) = \{\widetilde{\Psi}_i(g_{ij}).h_{ij}\}$.

τ ist Vektorraum-Isomorphismus und Homöomorphismus von $C^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0})$ auf $C^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{M_n(C)})$. Mit den natürlichen Einbettungen $adP_0 \subset AdP_0$, $GL(n,C) \subset M_n(C)$ wird $\tau C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0}) = C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$, das Bild von $1 \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0})$ wird $h \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$. Man rechnet ferner nach, daß $\tau Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0}) = Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ und daß τ eine bijektive Abbildung

$$\tau_* : H^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$$

induziert, welche das ausgezeichnete Element von $H^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0})$ in die Klasse von h in $H^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ überführt.

Vermöge dieser Abbildung gewinnen wir aus Satz 2a den

Satz 3a: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, P_0 ein GL(n,C)-Bündel über X, $H^2(X, \underset{\sim}{AdP_0}) = 0$. Dann ist jedes GL(n,C)-Bündel P_1 über X, das durch einen Cozyklus h_1 beschrieben werden kann, welcher hinreichend nahe bei einem P_0 beschreibenden Cozyklus liegt, Deformation von P_0.

Satz 4a: Seien X und P_0 wie oben. Ist $H^2(X, \underset{\sim}{AdP_0}) = 0$, so tritt jedes Element von $H^1(X, \underset{\sim}{AdP_0})$ als "infinitesimale Deformation" von P_0 auf.

Satz 4'a: Seien X und P_0 wie oben. Ist $H^2(X, \underset{\sim}{AdP_0}) = 0$, so wird jedes Element von $H^1(X, \mathcal{B}_k(P_0))$ durch ein Element von $H^1(X, \mathcal{A}(P_0))$ induziert. (k = 1,2,3,...)

4.3.1. Mit $\underline{GL(n,C)}$ bzw. $\underline{M_n(C)}$ wollen wir die Garbe der Keime lokal konstanter Abbildungen von X in GL(n,C) bzw. $M_n(C)$ bezeichnen. Ein GL(n,C)-Bündel P_o über X soll konstant heißen, wenn die ihm zugeordnete Cohomologieklasse $\in H^1(X, GL(n,C))$ im Bilde von

$$H^1(X, \underline{GL(n,C)}) \longrightarrow H^1(X, \underline{GL(n,C)})$$

liegt, d.h. also, wenn es über einer geeigneten Überdeckung $\mathcal{U}$ von X durch einen Cozyklus $g \in Z^1(\mathcal{U}, \underline{GL(n,C)})$ definiert werden kann. Der Cozyklus ad(g) ist dann auch konstant, man kann also "konstante Schnitte" in adP_o bzw. AdP_o definieren. Die Garbe der Keime solcher Schnitte sei mit $\underline{adP_o}$ bzw. $\underline{AdP_o}$ bezeichnet. Auf $C^q(\mathcal{U}, \underline{AdP_o})$ läßt sich mittels der üblichen Karten eine Norm einführen:

Für $a = \{a_{i_o \dots i_q}\} \in C^q(\mathcal{U}, \underline{AdP_o})$ sei

$$|a| := \sup_{(i_o, \dots, i_q)} |\tilde{\varphi}_{i_o}(a_{i_o \dots i_q})|,$$

wobei unter dem Betrag einer Matrix wie üblich das Maximum der Beträge der Komponenten verstanden sei. Ist $\mathcal{U}$ endlich, so ist auch die Norm der Coketten stets endlich, und es spaltet die exakte Sequenz endlich-dimensionaler Vektorräume

$$0 \longrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \underline{AdP_o}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \underline{AdP_o}) \underset{\alpha}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} B^2(\mathcal{U}, \underline{AdP_o}) \longrightarrow 0:$$

$\alpha: B^2(\mathcal{U}, \underline{AdP_o}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, AdP_o)$ ist ein Homomorphismus mit $\partial \circ \alpha =$ Identität, und es gibt eine Konstante K mit $|a| \leq c \Longrightarrow |\alpha(a)| \leq Kc$ für $a \in B^2(\mathcal{U}, \underline{AdP_o})$. Deswegen können wir wie im ersten Abschnitt dieses Paragraphen rechnen und erhalten den

Satz 2b: Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U}$ eine endliche LERAY-Überdeckung, P_o ein konstantes GL(n,C)-Bündel über X, $H^2(X, \underline{AdP_o}) = 0$. Es gibt eine stetige surjektive

Abbildung einer Umgebung von $0 \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{AdP_0})$ auf eine Umgebung von $1 \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{adP_0})$, die 0 in 1 überführt.

Ist P_0 das triviale Bündel, so ergibt sich als Spezialfall:

Satz 2c: Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit, $H^2(X,C) = 0$, $\mathfrak{U}$ eine endliche LERAY-Überdeckung von X. Dann gibt es eine stetige surjektive Abbildung einer Umgebung von $0 \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{M_n(C)})$ auf eine Umgebung von $1 \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{GL(n,C)})$.

Wir wollen sagen, daß eine lokale komplex-analytische Deformation $P \longrightarrow B \times X$ eines konstanten Bündels P_0 über einer komplexen Mannigfaltigkeit X "durch konstante Bündel" erfolge, wenn für $t \in B$ $P|(t \times X)$ durch $g(t) \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{GL(n,C)})$ beschrieben werden kann, wo g(t) holomorph von t abhängt.

Das heißt nichts anderes, als daß der Cozyklus $\gamma \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{A}(P_0))$, der dieser Deformation nach §2 zugeordnet werden kann, in der Potenzreihenentwicklung (1o) konstante Koeffizienten hat, also Koeffizienten $\in C^1(\mathfrak{U}, \underline{AdP_0})$. Mit dieser Sprechweise gewinnen wir unter Benutzung einer Abbildung wie bei Satz 3a den

Satz 3b: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, P_0 ein konstantes GL(n,C)-Bündel über X, $H^2(X, \underline{AdP_0}) = 0$. Dann ist jedes konstante Bündel P_1, das im Sinne der Cozyklen hinreichend nahe bei P_0 liegt, analytische Deformation von P_0 durch konstante Bündel.

Satz 3c: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $H^2(X,C) = 0$. Dann ist jedes konstante GL(n,C)-Bündel P_1, das durch einen hinreichend nahe bei 1 gelegenen Cozyklus beschrieben werden kann, analytische Deformation des trivialen Bündels "durch konstante Bündel".

Die "infinitesimale Deformation" einer Deformation durch konstante Bündel ist ein Element von $H^1(X, \underline{AdP_0})$, es gilt:

Satz 4b: Seien X und P_0 wie in Satz 3b, sei $H^2(X, \underline{AdP_0}) = 0$.

Dann tritt jedes Element von $H^1(X, \underline{AdP}_0)$ als infinitesimale Deformation einer Deformation durch konstante Bündel auf.

Satz 4c: Sei X wie in Satz 3c, $H^2(X,C) = 0$. Dann tritt jedes Element von $H^1(X,\underline{M_n(C)})$ als infinitesimale Deformation des trivialen GL(n,C)-Bündels durch konstante Bündel auf.

4.3.2. Ein gut zu übersehendes Beispiel für konstante Bündel über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X mit $H^2(X, C) = 0$ wird durch Bündel über HOPFschen Mannigfaltigkeiten geliefert.

Bekanntlich wird jedes konstante Bündel über der Mannigfaltigkeit X durch eine Darstellung $\varrho : \pi_1(X) \longrightarrow GL(n,C)$ der Fundamentalgruppe von X induziert (cf.ATIYAH [9]). Zwei konstante Bündel sind genau dann "konstant isomorph", (d.h. gehören zum selben Element von $H^1(X, \underline{GL(n,C)})$), wenn sie von äquivalenten Darstellungen induziert werden. Es gilt das

Lemma: Sei X eine (komplexe) Mannigfaltigkeit, $\tilde{X}$ die universelle Überlagerung von X. Seien ϱ und σ zwei Darstellungen von $\pi_1(X)$ in GL(n,C). Die dadurch induzierten konstanten Bündel sind genau dann topologisch (analytisch) isomorph, wenn es eine stetige (holomorphe) Abbildung $f: \tilde{X} \longrightarrow GL(n,C)$ gibt mit

$$f(\varphi(x)) = \varrho(\varphi).f(x).\sigma(\varphi)^{-1} \text{ für alle } x \in \tilde{X},\ \varphi \in \pi_1(X).$$

Dabei ist $\pi_1(X)$ als Decktransformationsgruppe auf $\tilde{X}$ aufzufassen.

Dieses Lemma findet sich in einem Spezialfall bei H.RÖHRL [10], sein Beweis ist leicht.

Sei nun $\gamma \in GL(m,C)$, $m \geq 2$, seien die Eigenwerte von γ dem Betrage nach alle größer als 1. Γ sei die von γ erzeugte zyklische Gruppe, sie operiert als Gruppe linearer Transformationen eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf $C^m - \{0\}$. Die Quotientenmannigfaltigkeit

$X = {}^{C^m-\{0\}}\!/_{\Gamma}$ nennen wir eine HOPFsche Mannigfaltigkeit. X ist homöomorph zu $S^{2m-1} \times S^1$, es ist also $\pi_1(X) \cong Z$ und $H^2(X,C) = 0$; die Ergebnisse von §4.3.1. sind also auf HOPFsche Mannigfaltigkeiten anwendbar. Eine Darstellung von $\pi_1(X)$ in GL(n,C) ist bestimmt durch das Bild eines erzeugenden Elements von $\pi_1(X)$. Das bedeutet, daß $H^1(X,\underline{GL(n,C)})$ sich mit der Menge der Ähnlichkeitsklassen in GL(n,C) identifiziert.

Mit Hilfe des obigen Lemmas läßt sich noch zeigen, daß die natürliche Abbildung $H^1(X,\underline{GL(n,C)}) \longrightarrow H^1(X,\underline{GL(n,C)})$ injektiv ist: Seien die durch die Darstellungen ϱ und $\sigma : \pi_1(X) \longrightarrow GL(n,C)$ definierten konstanten Bündel analytisch isomorph, sei $f: C^m - \{0\} \longrightarrow GL(n,C)$ eine holomorphe Abbildung mit der im Lemma geforderten Transformationseigenschaft, d.h.

$$(*) \quad f(\gamma^k z) = \varrho(\gamma)^k . f(z) . \sigma(\gamma)^{-k}$$

für alle ganzen k und $z \in C^m - \{0\}$. Nach einem Satz von HARTOGS läßt sich f fortsetzen zu einer hier auch mit f bezeichneten holomorphen Abbildung $C^m \longrightarrow GL(n,C)$. Für $k \longrightarrow -\infty$ strebt $\gamma^k z$ nach Null, es muß also auch der Limes der rechten Seite von (*) existieren, in GL(n,C) liegen und unabhängig von z sein, nämlich gleich f(0). Sind $z_1, z_2 \in C^m - \{0\}$, so wird mit

$$\varrho(\gamma)^k . f(z_1) . \sigma(\gamma)^{-k} \longrightarrow f(0), \quad \varrho(\gamma)^k . f(z_2) . \sigma(\gamma)^{-k} \longrightarrow f(0)$$

auch $\varrho(\gamma)^k . f(z_1) . f(z_2)^{-1} . \varrho(\gamma)^{-k} =$

$$= \varrho(\gamma)^k f(z_1)\, \sigma(\gamma)^{-k} \left(\varrho(\gamma)^k f(z_2)\, \sigma(\gamma)^{-k}\right)^{-1} \longrightarrow 1 ,$$

das ist aber nur möglich, wenn $f(z_1).f(z_2)^{-1} = 1$ ist, also f konstant. Dann sind aber die Darstellungen ϱ und σ äquivalent, die zugehörigen Bündel sind schon konstant isomorph.

§5 Folgerungen aus $H^1(X, \underset{\sim}{AdP}_0) = 0$.

KODAIRA und SPENCER [5], §7, zeigen: Wenn X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist, P_0 ein komplex-analytisches GL(n,C)-Bündel über X und $H^1(X, \underset{\sim}{AdP}_0) = 0$, so ist jede Deformation von P_0 lokal trivial, d.h. lokal äquivalent zu $B \times P_0 \longrightarrow B \times X$. Wir beweisen hier

Satz 5: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, P_0 ein komplex-analytisches GL(n,C)-Bündel über X, $H^1(X, \underset{\sim}{AdP}_0) = 0$. Jedes Bündel P_1, definiert durch ein Element von $Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ - $\mathcal{U}$ geeignet - welches hinreichend nahe bei einem P_0 definierenden Cozyklus liegt, ist analytisch äquivalent zu P_0.

Dieser Satz ist insofern eine Verschärfung des KODAIRA-schen Satzes, als wir nicht voraussetzen, daß P_1 eine Deformation von P_0 sei.

Beweis: $\mathcal{U}$ sei eine Überdeckung von X mit den Eigenschaften, wie sie im Lemma von §4.1 gefordert werden, außerdem sei $\mathcal{U}$ noch so fein, daß P_0 durch einen in der $|\ |_e$-Norm beschränkten Cozyklus $g_0 \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ gegeben wird. Nach dem Lemma spaltet die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow Z_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \longrightarrow C_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \underset{\alpha}{\overset{\partial_1}{\rightleftarrows}} B_e^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \longrightarrow 0.$$

($\partial_1 \circ \alpha$ = Identität, es gibt eine Konstante K mit

$$|a|_e \leq c \implies |\alpha(a)|_e \leq Kc \text{ für } a \in B_e^2(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0).)$$

Ein analoges Lemma gilt für die Coketten der Dimension 0 und läßt sich mit denselben Methoden beweisen: Die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_e^0(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \longrightarrow C_e^0(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \underset{\beta}{\overset{\partial_0}{\rightleftarrows}} B_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \longrightarrow 0$$

ist exakt und spaltet, d.h. es gibt einen Homomorphismus

$$\beta: B_e^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0) \longrightarrow C_e^0(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP}_0)$$

mit $\partial_0 \circ \alpha$ = Identität und eine Konstante L mit

$$|a|_e \leq c \Longrightarrow |\beta(a)|_e \leq Lc \text{ für } a \in B^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0}).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir K = L an.

Ferner benötigen wir die in §4.2. betrachtete Bijektion

$$\tau = \tau_{g_0} : Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0}) \longrightarrow Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)}).$$

Wir setzen noch $R := |g_0|_e \geq 1$, $\gamma := 6(n^3R^2)^2.K$ und wählen $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\varepsilon\gamma < 1$ und daß für jede Matrix c mit $|c| \leq 2K\varepsilon$ die Matrix $1 + c$ invertierbar ist und $|(1 + c)^{-1}| \leq 2$ gilt.

Sei nun $g_1 \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ so nahe bei g_0, daß für $\tau^{-1}(g_1) - 1 =: a_1 \in C^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0})$ gilt $|a_1|_e \leq \varepsilon$.

Wir definieren nun induktiv gewisse Elemente

$\tilde{g}_k \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0})$ (k=1,2,3,...),

$a_k \in C^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0})$(k = 1,2,3,...), $c_k \in C^0_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0})$

(k = 0,1,2,....) mit

$$(18_k) \qquad \partial_1 a_k = -a_k \smile a_k$$

$$(19_k) \qquad |a_k|_e \leq \gamma^{-1}.(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}} \Big\}_{k=1,2,3,\ldots},$$

$$(20_k) \qquad |c_k|_e \leq 2K.\gamma^{-1}(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}}, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Es sei nämlich $\tilde{g}_1 = \tau^{-1}(g_1)$; a_1 ist schon definiert und erfüllt offenbar (19_1), ebenso (18_1), da $\tilde{g}_1$ multiplikativer Cozyklus ist. Wir setzen $c_0 = 0$, das erfüllt (20_0).

Sind c_{k-1}, a_k, $\tilde{g}_k$ schon definiert mit (18_k), (19_k), (20_{k-1}), so sei

$$c_k := \beta(a_k - \alpha\partial_1(a_k)).$$

Das ist wohldefiniert, denn $a_k - \alpha\partial_1(a_k) \in Z^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{AdP_0})$; da $H^1(X, \underset{\sim}{AdP_0}) = 0$ und $\mathcal{U}$ STEINsch ist, folgt

$a_k - \alpha\partial_1(a_k) \in B^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_o)$, wir können also β darauf anwenden. Für c_k erhalten wir mittels (18_k) und (19_k) die Abschätzung

$$|c_k|_e \leq K.\{\gamma^{-1}(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}} + Kn^3R^2.\gamma^{-2}.(\gamma\varepsilon)^{2^k}\}$$
$$= K.\gamma^{-1}.(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}}\{1 + \underbrace{Kn^3R^2\gamma^{-1}}_{\leq 1}.\underbrace{(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}}}_{\leq 1}\}$$
$$\leq 2K\gamma^{-1}.(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}}. \qquad (2o_k)$$

Wegen $\gamma\varepsilon < 1$ folgt noch $|c_k|_e \leq 2K\varepsilon$, es existiert also

$$(1 + c_k)^{-1} \in C^0_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{ad}}P_o) \text{ mit } |(1 + c_k)^{-1}|_e \leq 2.$$

Wir setzen weiter

$$g_{k+1} := (1+c_k)\smile\tilde{g}_k\smile(1 + c_k)^{-1} \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{ad}}P_o),$$

$$a_{k+1} := \tilde{g}_{k+1} - 1 \in C^1_e(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{Ad}}P_o).$$

(18_{k+1}): $\partial_1 a_{k+1} = -a_{k+1}\smile a_{k+1}$ folgt wieder daraus, daß $\tilde{g}_{k+1}$ ein multiplikativer Cozyklus ist. Man rechnet weiter aus, daß $a_{k+1} = (c_k\smile a_k + \alpha\partial_1(a_k))\smile(1 + c_k)^{-1}$, und gewinnt daraus mittels (18_k), (19_k), $(2o_k)$ und $|(1 + c_k)^{-1}|_e \leq 2$ die Abschätzung

$$|a_{k+1}|_e \leq 2n^3R^2\{n^3R^2.2K\gamma^{-1}.(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}}.\gamma^{-1}.(\gamma\varepsilon)^{2^{k-1}} +$$
$$+ Kn^3R^2\gamma^{-2}(\gamma\varepsilon)^{2^k}\}$$
$$= \gamma^{-1}.(\gamma\varepsilon)^{2^k}. \qquad (19_{k+1}).$$

Aufgrund der Abschätzungen (19_k) konvergieren die so konstruierten $\tilde{g}_k$ gegen $1 \in Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{\mathrm{ad}}P_o)$, nach Konstruktion sind sie alle untereinander analytisch äquivalent. Es konvergiert aufgrund von $(2o_k)$ auch das unendliche Produkt

$$\ldots\ldots(1 + c_3).(1 + c_2).(1 + c_1)$$

gegen ein Element aus $C^0(\mathcal{U}, \underset{\sim}{adP_0})$. Daraus folgt, daß alle $\tilde{g}_k$, insbesondere $\tilde{g}_1$, analytisch äquivalent zum trivialen 1-Cozyklus in $\underset{\sim}{adP_0}$ sind. Transportiert man sie nach $Z^1(\mathcal{U}, \underset{\sim}{GL(n,C)})$ zurück:

$$g_k := \tau(\tilde{g}_k),\ k = 1,2,3,\ldots\ ,\quad g_0 = \tau(1),$$

so ändert das nichts an der Äquivalenz, es ist also g_1 analytisch äquivalent zu g_0, q.e.d.

Für den Spezialfall $P_0 = X \times GL(n,C)$ erhalten wir den

Satz 5a: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$. Dann ist jedes GL(n,C)-Bündel, das durch einen hinreichend nahe bei 1 gelegenen Cozyklus beschrieben werden kann, analytisch trivial.

Literatur

[1] N.BOURBAKI: Algèbre, Ch.II, §7,no.1.(Paris 1955)

[2] H.CARTAN: Séminaire ENS 1960/61: Familles d'espaces complexes et fondements de la géometrie analytique.(Fasc. 1, Paris 1962)

[3] C.CHEVALLEY: Theory of LIE-groups I (Princeton 1946)

[4] A.GROTHENDIECK: A general theory of fibre spaces with structure sheaf.(Lawrence/Kansas 1955)

[5] K.KODAIRA - D.C.SPENCER: On deformations of complex analytic structures.(Annals of Math.67, 326-401, (1958))

[6] J.L.KOSZUL: Lectures on fibre bundles and differential geometry. (Tata Inst., Bombay 1960)

[7] M.KURANISHI: On the locally complete families of complex analytic structures.(Annals of Math. 75,536-577,(1962))

[8] F.HIRZEBRUCH: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.(Ergebn.Math., Berlin 1956)

[9] M.F.ATIYAH: Complex analytic connections in fibre bundles.(Transact. Am.Math.Soc. 85,181-207, (1957))

[10] H.RÖHRL: Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen.(Math. Ann. 133,1-25 (1957))

Lebenslauf

Am 17. August wurde ich, Wolfgang Fischer, als Sohn des Studienrates Heinrich Fischer und seiner Ehefrau Eva, geb. Pommerrenig, in Bremen geboren. Vom Sommer 1942 bis Ostern 1947 besuchte ich die Volksschule in Bremen, Freiberg i.Sa. und Fischerhude (Kreis Verden/Aller). Von Ostern 1947 an besuchte ich die Oberschule für Jungen an der Hermann-Böse-Straße in Bremen, wo ich im Februar 1955 die Reifeprüfung bestand.

Im Sommersemester 1955 begann ich das Studium der Mathematik und Physik in Göttingen. Hier studierte ich 5 Semester, das Zwischenexamen legte ich im Mai 1957 ab. Im Winter 1957/58 studierte ich in Freiburg/Br., im Sommer 1958 in Frankfurt/M.. Dann kehrte ich nach Göttingen zurück, wo ich im Sommer 196o das Staatsexamen in Mathematik und Physik ablegte. Von einem Studienaufenthalt in Paris während des Winters 1961/62 abgesehen, blieb ich in Göttingen. Am hiesigen Mathematischen Institut war ich im Sommersemester 1957 und wieder ab Sommer 1959 als wissenschaftliche Hilfskraft tätig, bis mich Herr Professor Grauert im August 1962 mit der Verwaltung einer Assistentenstelle betraute.

In meinem Studium wurde ich besonders angeregt durch Vorlesungen und Seminare der Herren Proff. Artin, Baer, Cartan, Deuring, Grauert, Hilsch, Hund, Klingenberg und Siegel. Bis zum Staatsexamen beschäftigte ich mich hauptsächlich mit der Algebra, besonders mit Gruppentheorie und algebraischer Zahlentheorie. Dann weckte Herr Professor Grauert mein Interesse für die Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Aus diesem Gebiet stammt auch das Thema meiner Dissertation.